# LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

# LE RADIUM


## SUR LA THERMODYNAMIQUE DE QUELQUES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES
## II. DIFFUSION THERMIQUE ET PHÉNOMÈNES CONNEXES


Par S. R. DE GROOT.

Laboratoire de Chimie nucléaire du Collège de France.



**Sommaire.** — La thermodynamique des processus irréversibles, qui repose sur l'emploi des relations réciproques d'Onsager, est développée pour un mélange dans le cas de la diffusion thermique (effet Soret) et de phénomènes connexes comme l'effet Dufour (effet thermique de la diffusion) et les potentiels de diffusion ordinaire et thermique.


1. **Introduction**. — La thermodynamique des processus irréversibles repose sur l'emploi des relations réciproques d'Onsager [1]. Dans ce mémoire une théorie sera développée pour un mélange de corps chimiques dans lequel s'opèrent les phénomènes irréversibles de conduction de chaleur, de diffusion et de conduction électrique ainsi que les effets résultant de l'interaction de deux d'entre eux. La diffusion thermique par exemple (qu'on appelle effet Soret [2] quand il se produit dans l'état condensé), se manifestant par la diffusion de matière dans un champ de température non uniforme, résulte de l'interaction de la conduction de la chaleur et de la diffusion. Il existe pourtant un autre effet dépendant de cette même interaction et qui est en un certain sens l'effet inverse de l'effet Soret, c'est l'effet Dufour [3] selon lequel un gradient de température s'établit quand deux corps diffusent l'un dans l'autre. Or, d'après la théorie d'Onsager, il y a des relations réciproques entre phénomènes irréversibles inverses.

Pour les phénomènes traités dans ce mémoire il existe aussi des théories « quasi thermostatiques », dans lesquelles on applique les lois de la thermostatique habituelle à une partie du processus supposée réversible. Eastman [4] et Wagner [5] ont développé une pareille méthode pour l'état stationnaire de la diffusion thermique. Ces auteurs émettent l'hypothèse qu'un transport virtuel de matière peut être considéré comme réversible et ils font abstraction de la conduction de chaleur irréversible qui subsiste à l'état stationnaire : la méthode est évidemment erronée, mais les résultats sont confirmés par l'expérience et par la théorie thermodynamique (c'est-à-dire avec emploi des relations d'Onsager). On peut également construire une théorie « quasi thermostatique » pour les potentiels électriques dans le cas général non stationnaire [2].

Dans ce mémoire la théorie thermodynamique avec relations d'Onsager est développée dans le cas de la diffusion thermique et les phénomènes connexes, et l'on trouve entre autres résultats toutes les formules de Wagner pour l'état stationnaire et les expressions pour les potentiels électriques.

2. **Les paramètres conjugués**. — Pour trouver les paramètres conjugués, qui entrent comme « flux » et « forces » dans les relations phénoménologiques, décrivant les processus irréversibles, il faut calculer la source d'entropie, quand il y a des fluctuations dans le système considéré. Je veux généraliser le raisonnement d'un premier mémoire [1] dans deux directions. Premièrement j'admettrai que le système est un mélange de $j$ composants ($i = 1, \ldots, j$), et deuxièmement je tiendrai compte de l'existence éventuelle de forces externes $F_i$ sur l'unité de masse du composant $i$ afin de pouvoir déduire les effets électriques.

Supposons que le mélange se trouve dans un récipient à deux parties. Alors on peut écrire pour la variation de l'entropie dans la première partie, à cause des fluctuations $\Delta U$ dans l'énergie et $\Delta_1 m$ dans la masse du composant $i$

$$\Delta_1 S = \frac{\partial S}{\partial U}\Delta_1 U + \sum_i \frac{\partial S}{\partial m_i}\Delta_1 m_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}(\Delta_1 U)^2 + \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial U\,\partial m_i}\Delta_1 U\,\Delta_1 m_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 S}{\partial m_i\,\partial m_k}\Delta_1 m_i\,\Delta_1 m_k \tag{1}$$

et pour la seconde partie une expression semblable avec indices 2. Supposons que le récipient soit adiabatiquement isolé. La loi de conservation de masse s'exprime comme

$$\Delta_1 m_i + \Delta_2 m_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, j) \tag{2}$$

et celle de l'énergie comme

$$\Delta_1 U + \Delta_2 U = \sum_i F_i\,\Delta m_i\,\Delta x, \tag{3}$$

où $\Delta x$ est la distance sur laquelle la masse $\Delta m_i$ est transportée. Si l'on écrit

$$2\Delta S = \Delta_1 S + \Delta_2 S \tag{4}$$

pour la variation de l'entropie de la masse

$$2\sum m_i = 2M,$$

on trouve

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial U}\sum F_i\,\Delta m_i\,\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}(\Delta U)^2 + \sum \frac{\partial^2 S}{\partial U\,\partial m_i}\Delta U\,\Delta m_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 S}{\partial m_i\,\partial m_k}\Delta m_i\,\Delta m_k, \tag{5}$$

si l'on n'emploie de termes que jusqu'au troisième ordre et avec

$$\Delta U \simeq \Delta_1 U \simeq -\Delta U_2 \qquad \text{et} \qquad \Delta m_i = \Delta_1 m_i = -\Delta_2 m_i$$

La dérivée temporelle de $\Delta S$ est égale à

$$\Delta\dot{S} = \Delta\dot{U}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\Delta U + \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial U\,\partial m_i}\Delta m_i\right) + \sum_i \Delta\dot{m}_i\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U\,\partial m_i}\Delta U + \sum_k \frac{\partial^2 S}{\partial m_i\,\partial m_k}\Delta m_k + \frac{\partial S}{\partial U}F_i\,\Delta x\right) \tag{6}$$

$$\Delta\dot{S} = \Delta\dot{U}\,\Delta\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) + \sum_i \Delta\dot{m}_i\left\{\Delta\left(\frac{\partial S}{\partial m_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial U}F_i\,\Delta x\right\}. \tag{7}$$

Si (7) est écrit sous forme de somme de produits de paramètres conjugués

$$\Delta\dot{S} = \left(J_u X_u + \sum_i J_i X_i\right)\Delta x, \tag{8}$$

les « flux » suivants sont introduits

$$J_u \equiv \Delta\dot{U} \quad \text{(courant d'énergie)} \tag{9}$$

et

$$J_i \equiv \Delta\dot{m}_i \quad (\;\text{»}\;\; \text{de matière } i). \tag{10}$$

On a les relations thermostatiques

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \tag{11}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial m_i} = -\frac{\mu_i}{T}, \tag{12}$$

de sorte que les « forces » correspondant aux « flux » sont

$$X_u = \frac{\Delta T^{-1}}{\Delta x} = -\frac{\Delta T}{T^2\,\Delta x} = -\frac{\operatorname{grad} T}{T^2} \tag{13}$$

et

$$X_i = -\Delta\left(\frac{\mu_i}{T}\right) + \frac{F_i}{T} = -\operatorname{grad}\left(\frac{\mu_i}{T}\right) + \frac{F_i}{T}, \tag{14}$$

avec $\mu_i$ le potentiel chimique du composant $i$.

La « force » (14) est composée de deux termes. Le premier [6] n'est pas simplement le gradient de concentration, comme dans la loi de Fick, mais le gradient de $\frac{\mu_i}{T}$. Le second terme contient la force externe, ici la force électrique

$$F_i = -e_i \operatorname{grad}\varphi, \tag{15}$$

où $e_i$ est la charge de l'unité de masse du composant $i$ et où $\varphi$ est le potentiel électrique. Le courant électrique $I_i$ est relié au transport de matière de la substance $i$ par

$$I_i = e_i J_i, \tag{16}$$

de sorte que courant électrique total est

$$I = \sum_i I_i = \sum_i e_i J_i. \tag{17}$$

La contribution du courant électrique à $\Delta\dot{S}$ contient

$$\sum_i J_i F_i = -\sum_i I_i \operatorname{grad}\varphi = -I \operatorname{grad}\varphi, \tag{18}$$

la chaleur de Joule.

Comme le potentiel chimique est une fonction de la température, de la pression et de la composition, exprimée par $(j-1)$ des $j$ concentrations relatives $n_i$ $\left[\text{parce que } \sum_i n_i = 1 \;(19)\right]$

$$\mu_i = \mu_i(T, p, n_1, \ldots, n_{j-1}), \tag{20}$$

on a

$$\operatorname{grad}\mu_i = -s_i \operatorname{grad} T + v_i \operatorname{grad} p + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \mu_i}{\partial n_k} \operatorname{grad} n_k \quad (21)$$

($s_i$ et $v_i$, entropie et volume molaire partiel du composant $i$), de sorte que la force $X_i$ peut s'écrire

$$X_i = \frac{w_i}{T} \operatorname{grad} T - v_i \operatorname{grad} p - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_k}\right) \operatorname{grad} n_k - e_i \operatorname{grad} \varphi, \quad (22)$$

où $w_i$ est l'enthalpie molaire partielle du composant $i$

$$(w_i = \mu_i + T s_i).$$

3. **Les relations phénoménologiques**. — Pour un mélange isotrope on peut admettre comme première approximation

$$J_i = \sum_k a_{ik} X_k + b_i X_u \quad (i = 1, \ldots, j), \quad (23)$$

$$J_u = \sum_k b'_k X_k + c X_u. \quad (24)$$

On voit dans (23) que les forces $X_k$ donnent naissance entre autres choses à des flux $a_{kk} X_k$. Or, suivant (14) ou (22), la force contient des termes en grad $n_k$ et grad $\varphi$. Dire que ces « forces » engendrent des flux qui leur sont proportionnels c'est exprimer les lois de la diffusion et d'Ohm. Pour les systèmes isothermes et idéaux la loi de la diffusion est identique à la loi de Fick, qui dit que le flux de la matière est proportionnel au gradient de concentration. Il résulte de (24) qu'un gradient de température $T^2 X_u$ provoque un courant d'énergie $c X_u$, expression de la loi de Fourier. On voit également se présenter dans les relations phénoménologiques des termes provenant d'une « interaction » de deux phénomènes. Par exemple $a_{ik} X_k$ est le flux de matière de l'espèce $i$ résultant d'une force $X_k$, liée à la substance $k$. Le dernier terme à droite de (23) est un flux de matière $b_i X_u$ provenant d'un radient de température $T^2 X_u$. Il représente donc une diffusion thermique. Ce n'est toutefois pas la diffusion thermique entière parce que $X_i$ contient lui aussi un terme avec grad $T$. Dans (24) on voit que le terme $b_i X_i$ contient l'effet inverse de la diffusion thermique : c'est l'effet Dufour, celui d'un flux d'énergie provoqué par un gradient de concentration.

4. **Les relations d'Onsager**. — La première classe de relations réciproques d'Onsager s'exprime par

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (25)$$

et montre que le flux de matière de l'espèce $i$ causé par une « force » $X_k$ est régi par un coefficient qui est égal à celui qui gouverne le flux de $k$ causé par $X_i$.

Plus intéressante encore est la deuxième classe de relations d'Onsager

$$b_i = b'_i, \quad (26)$$

reliant les coefficients de diffusion thermique et d'effet Dufour.

5. **L'état stationnaire**. — Introduisons d'abord les grandeurs $Q_k$ définies par

$$b_i = \sum_k a_{ik} Q_k \quad (i = 1, \ldots, j). \quad (27)$$

On obtient alors en introduisant (27) dans (23)

$$J_i = \sum_k a_{ik} (X_k + Q_k X_u) \quad (i = 1, \ldots, j). \quad (28)$$

La définition de l'état stationnaire est

$$J_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, j); \quad \text{mais} \quad J_u \neq 0. \quad (29)$$

Les relations (28) deviennent donc pour ce cas

$$X_i + Q_i X_u = 0 \quad (i = 1, \ldots, j) \quad (30)$$

ou, en écrivant explicitement les forces à l'aide de (13), (14) et (15)

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad}\mu_i + e_i \operatorname{grad}\varphi + (Q_i - \mu_i) T^{-1} \operatorname{grad} T = 0 \\ (i = 1, \ldots, j), \end{array}\right\} \quad (31)$$

où encore avec l'expression (21) ou (22)

$$\left.\begin{array}{l} v_i \operatorname{grad} p + \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_k}\right) \operatorname{grad} n_k \\ \quad + e_i \operatorname{grad}\varphi + (Q_i - w_i) T^{-1} \operatorname{grad} T = 0 \\ \quad (i = 1, \ldots, j). \end{array}\right\} \quad (32)$$

Telles sont les équations générales régissant l'état stationnaire.

Dans la théorie présente les relations d'Onsager n'ont pas encore été utilisées. On a vu d'autre part que les grandeurs $Q_i$ n'ont été définies que formellement par (27) comme des combinaisons des coefficients $a_{ik}$ et $b_i$. Or, on peut démontrer qu'il est possible de donner une interprétation physique des $Q_i$ à l'aide des relations d'Onsager (25) et (26). A cette fin multiplions les équations (23) par $Q_i$ et additionnons-les

$$\sum_i Q_i J_i = \sum_{i,k} Q_i a_{ik} X_k + \sum_i Q_i b_i X_u. \quad (33)$$

En soustrayant cette équation de (24) on trouve que les premiers termes des seconds membres s'annulent comme conséquence des relations d'Onsager (25) et (26) appliqués à (27). On a par

conséquent

$$J_u = \sum_i Q_i J_i + \left(c - \sum_i Q_i b_i\right) X_u. \qquad (34)$$

Cette équation permet de donner une interprétation physique : à l'état isotherme ($X_u = 0$) $Q_i$ est l'énergie transportée par l'unité de masse du composant $i$ (c'est-à-dire quand $J_i = 1$). On pourrait appeler $Q_i$ une « énergie ou chaleur de transport », si cette expression n'était déjà utilisée pour la notion

$$Q_i^* = Q_i - w_i, \qquad (35)$$

où $Q_i^*$ est la chaleur absorbée par une partie I du système (avec température $T$) et dégagée par la partie II (avec température $T + dT$) quand l'unité de masse du composant $i$ passe de I à II, de sorte que les températures de I et II conservent leurs valeurs initiales, la pression étant uniforme.

La formule (34) montre que pour l'état stationnaire

$$J_u = \left(c - \sum_i Q_i b_i\right) X_u, \qquad (36)$$

tandis qu'aussitôt après l'application du champ de température non uniforme, c'est-à-dire quand on a encore grad $n_k = 0$ ($k = 1, \ldots, j$), grad $p = 0$ et grad$\varphi = 0$

$$J_u = \left(c - \sum_i w_i b_i\right) X_u, \qquad (37)$$

comme on voit en introduisant (22) dans (24).

Le coefficient de conductibilité de (36) contient les grandeurs $Q_i$, qui sont caractéristiques pour la migration de matière qui a eu lieu pour arriver à l'état stationnaire. Le coefficient de (37) contient au lieu des $Q_i$ les grandeurs thermostatiques $w_i$.

6. **L'état stationnaire. La diffusion thermique.** — On dispose maintenant comme équations générales de l'état stationnaire de (31) ou (32) avec, si l'on préfère employer $Q_i^*$ au lieu de $Q_i$, les relations (35).

Les équations (32) avec

$$\sum_i n_i = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_i \operatorname{grad} n_i = 0 \qquad (38)$$

et la condition de la neutralité électrique

$$\sum n_i e_i = 1 \quad \text{ou} \quad \sum e_i \operatorname{grad} n_i = 0 \qquad (39)$$

forment un système de $j + 2$ équations linéaires qui permettent de calculer les grad $n_k$ ($k = 1, \ldots, j$), grad $\varphi$ et grad $p$ comme fonctions de grad $T$. Je veux ici déduire les équations différentielles de la diffusion thermique (ou effet Soret, quand il se produit dans un liquide ou un solide).

En multipliant les équations (32) respectivement par $n_1, n_2, \ldots, n_j$ et en les additionnant, on trouve, eu égard à la relation de Duhem-Margules $\sum n_i d\mu_i = 0$ et comme conséquence de (39)

$$v \operatorname{grad} p + \left(\sum_i n_i Q_i^*\right) \frac{\operatorname{grad} T}{T} = 0 \qquad (40)$$

avec

$$v = \sum_i n_i v_i.$$

Dans les problèmes à envisager ici on observe toujours que la pression est uniforme; on tire de (40) qu'alors

$$\sum_i n_i Q_i^* = 0. \qquad (41)$$

Les chaleurs de transport $Q_i^*$ ne peuvent donc pas avoir toutes le même signe.

Trouver les équations différentielles de la diffusion thermique revient à trouver les grad $n_i$ des équations générales (32), (38) et (39). Ici, quelques cas particuliers seront considérés sur les mélanges isobares et idéaux. Les équations (32) s'écrivent dans ce cas

$$RT \frac{\operatorname{grad} n_i}{n_i} + e_i \operatorname{grad} \varphi + Q_i^* \frac{\operatorname{grad} T}{T} = 0, \qquad (42)$$

parce que

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial n_k} = \delta_{ik} \frac{RT}{n_i}, \qquad (43)$$

où les substances $i = 1, \ldots, (j-1)$ sont les « corps dissous », tandis que $j$ est le « solvant ». On trouve ce que l'on appelle le « coefficient de Soret » si l'on élimine grad $\varphi$. A cet effet il faut multiplier les équations (42) respectivement par $n_i e_i$ et additionner

$$\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\sum_i e_i n_i Q_i^*}{\sum_i e_i^2 n_i} \frac{\operatorname{grad} T}{T}. \qquad (44)$$

En introduisant grad $\varphi$ de (44) dans (42), on trouve pour le coefficient de Soret

$$-\frac{1}{n_i} \frac{\operatorname{grad} n_i}{\operatorname{grad} T} = \frac{Q_i^*}{RT^2} - \frac{e_i \sum_k e_k n_k Q_k^*}{RT^2 \sum_k e_k^2 n_k}. \qquad (45)$$

Pour un composant non chargé, $e_i = 0$, le dernier terme est nul

$$-\frac{1}{n_i} \frac{\operatorname{grad} n_i}{\operatorname{grad} T} = \frac{Q_i^*}{RT^2}. \qquad (46)$$

Si l'on s'intéresse à la séparation relative de deux composants $i$ et $k$ sans charges électriques, deux

isotopes par exemple, il faut connaître la grandeur

$$-\frac{1}{\frac{n_i}{n_k}}\frac{\operatorname{grad}\frac{n_i}{n_k}}{\operatorname{grad} T} = -\frac{1}{n_i}\frac{\operatorname{grad} n_i}{\operatorname{grad} T} + \frac{1}{n_k}\frac{\operatorname{grad} n_k}{\operatorname{grad} T} = \frac{Q_i^\star - Q_k^\star}{RT^2}. \quad (47)$$

Pour la solution d'un électrolyte avec cations et anions monovalents ($e_1 = \varepsilon$, $e_2 = -\varepsilon$, $\varepsilon$ charge élémentaire de l'électricité) dans un solvant neutre ($e_3 = 0$) l'équation (45) devient

$$\frac{1}{n_1}\frac{\operatorname{grad} n_1}{\operatorname{grad} T} = -\frac{1}{n_2}\frac{\operatorname{grad} n_2}{\operatorname{grad} T} = \frac{\left(\frac{Q_1^\star}{e_1}\right)-\left(\frac{Q_2^\star}{e_2}\right)}{(e_1^{-1}-e_2^{-1})RT^2} = \frac{Q_1^\star + Q_2^\star}{2RT^2}. \quad (48)$$

Un cas intéressant qui ne peut se réaliser que dans une solution solide est celui d'un sel contenant deux cations « 1 » et « 2 » mobiles et un réseau fixe d'anions « 3 » ($\operatorname{grad} n_3 = 0$). Alors on trouve pour l'effet Soret des cations dans une solution idéale

$$-\frac{\operatorname{grad} n_1}{\operatorname{grad} T} = \frac{\operatorname{grad} n_2}{\operatorname{grad} T} = \frac{Q_1^\star - Q_2^\star}{T\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\mu_2}{\partial n_2}\right)} = \frac{Q_1^\star - Q_2^\star}{RT^2}\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}. \quad (49)$$

Avec une notation plus commode, employant les fractions moléculaires des sels 1 — 3 et 2 — 3 :

$$n_{13} = \frac{n_1}{n_1+n_2} \quad \text{et} \quad n_{23} = \frac{n_2}{n_1+n_2}, \quad (50)$$

il résulte que

$$-\frac{1}{\frac{n_{13}}{n_{23}}}\frac{\operatorname{grad}\frac{n_{13}}{n_{23}}}{\operatorname{grad} T} = -\frac{1}{n_{13}}\frac{\operatorname{grad} n_{13}}{\operatorname{grad} T} + \frac{1}{n_{23}}\frac{\operatorname{grad} n_{23}}{\operatorname{grad} T} = -\frac{1}{n_{13}(1-n_{13})}\frac{\operatorname{grad} n_{13}}{\operatorname{grad} T} = \frac{Q_1^\star - Q_2^\star}{RT^2}. \quad (51)$$

On a vu que l'effet Soret dépend des chaleurs de transport $Q_i^\star = Q_i - w_i$. Il est nul quand ces chaleurs disparaissent ou quand $Q_i = w_i$. On voit aussi que dans ce cas les coefficients de conductibilité de la chaleur de (36) et (37) sont égaux. Cela est évident puisque dans un mélange qui ne présente pas d'effet Soret, il ne s'opère pas de migrations de matière et la conductibilité de la chaleur est donc toujours la même.

7. **L'état stationnaire. L'effet thermoélectrique homogène.** — Les équations générales données au commencement du paragraphe précédent montrent qu'un gradient de potentiel s'établit dans le mélange. Ce gradient de potentiel, qui est trouvé en résolvant $\operatorname{grad}\varphi$, est appelé l'effet thermoélectrique homogène parce qu'il se trouve dans l'enceinte du mélange.

Considérons d'abord les mêmes exemples que ceux traités dans le paragraphe précédent. Pour un mélange idéal on a trouvé l'équation (44).

Pour une solution d'un électrolyte avec $e_1 = \varepsilon$ et $e_2 = -\varepsilon$ dans un milieu électriquement neutre, il s'ensuit donc

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{2}(Q_1^\star - Q_2^\star)\frac{\operatorname{grad} T}{\varepsilon T}. \quad (52)$$

Dans le dernier exemple traité dans le paragraphe 6, on a $\operatorname{grad}\varphi = 0$.

Il existe toutefois un cas spécial qui est réalisé dans certains électrolytes solides. C'est celui où l'un des deux composants est mobile et où l'autre forme le réseau fixe (exemples : électrons dans un métal, cations mobiles d'une structure « $\alpha$ » avec anions fixes). Alors l'effet Soret est pratiquement impossible à cause des grandes forces de Coulomb : $\operatorname{grad} n_i = 0$. L'effet thermoélectrique homogène est donc (42)

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{Q_i^\star}{e_i}\frac{\operatorname{grad} T}{T}. \quad (53)$$

8. **L'état non stationnaire.** — Dans l'étude de l'état stationnaire ($J_i = 0$) un potentiel électrique qui se présente dans le mélange anisotherme a été trouvé (§ 7). On peut se demander quelle est la valeur du potentiel électrique quand l'état stationnaire n'est pas encore atteint, en d'autres mots quand on a pour les flux de matières $J_i \neq 0$, ($i = 1, \ldots, j$). A cause de la grande interaction coulombienne le courant électrique total est toujours pratiquement nul

$$I = \sum_i I_i = \sum_i e_i J_i = 0, \quad (54)$$

c'est-à-dire que le mélange reste pratiquement neutre électriquement.

En combinant l'équation (54) avec l'expression de $J_i$ (28)

$$J_i = \sum_k a_{ik}(X_k + Q_k X_u), \quad (55)$$

on déduit

$$\sum_i e_i \sum_k a_{ik}(X_k + Q_k X_u) = 0. \quad (56)$$

En écrivant explicitement $X_u$ (13) et $X_i$ (14, 15) on obtient

$$\sum_i e_i \sum_k a_{ik}\left(-T\operatorname{grad}\frac{\mu_k}{T} - e_k\operatorname{grad}\varphi - Q_k\frac{\operatorname{grad} T}{T}\right) = 0, \quad (57)$$

donc

$$\operatorname{grad}\varphi=-\frac{\sum_{ik}a_{ik}e_i\operatorname{grad}\frac{\mu_k}{T}}{T\sum_{ik}a_{ik}e_ie_k}-\frac{\sum_{i,k}a_{ik}e_iQ_k}{\sum_{i,k}a_{ik}e_ie_k}\frac{\operatorname{grad}T}{T}. \quad (58)$$

Avec l'abréviation

$$t'_k=\frac{\sum_i a_{ik}e_ie_k}{\sum_{ik}a_{ik}e_ie_k}, \quad (59)$$

on en tire

$$\operatorname{grad}\varphi=-\sum_k\frac{t'_k}{e_k}T\operatorname{grad}\left(\frac{\mu_k}{T}\right)-\sum_k\frac{t'_k}{e_k}Q_k\frac{\operatorname{grad}T}{T}, \quad (60)$$

$$\operatorname{grad}\varphi=-\sum_k\frac{t'_k}{e_k}\operatorname{grad}\mu_k-\sum_k\frac{t'_k}{e_k}(Q_k-\mu_k)\frac{\operatorname{grad}T}{T}. \quad (61)$$

Les relations d'Onsager ($a_{ik}=a_{ki}$) permettent d'interpréter les grandeurs $t'_k$ (59) comme « nombres de transport » $t_k$ du composant $k$. On entend par nombre de transport $t_k$ la contribution que le corps $k$ fournit au transfert d'électricité. Afin de démontrer ceci, commençons par écrire le courant électrique que le composant $k$ produit quand $\operatorname{grad}T=0$ et quand la « force » $X_i=e_iT^{-1}\operatorname{grad}\varphi$ n'est causée que par le champ externe $\operatorname{grad}\varphi$

$$I_k=e_kJ_k=e_k\sum_i a_{ki}X_i=-e_k\sum_i a_{ki}e_iT^{-1}\operatorname{grad}\varphi. \quad (62)$$

Le nombre de transport $t_k$ est défini plus haut comme le quotient

$$t_k=\frac{I_k}{\sum_k I_k}=\frac{\sum_i a_{ki}e_ie_k}{\sum_{i,k}a_{ki}e_ie_k}. \quad (63)$$

Si l'on applique la première classe des relations d'Onsager $a_{ik}=a_{ki}$, on trouve que

$$t'_k=t_k, \quad (64)$$

de sorte que les accents dans les équations peuvent être supprimés.

9. **L'état non stationnaire. L'effet thermoélectrique homogène : potentiel de diffusion et potentiel de diffusion thermique.** — L'équation générale du potentiel (61) peut être récrite si l'on y introduit l'expression de $\operatorname{grad}\mu_i$ (21) et $Q_i^*$ (35).

On trouve

$$\operatorname{grad}\varphi=-\sum_i\frac{t_i}{e_i}v_i\operatorname{grad}p$$
$$-\sum_i\frac{t_i}{e_i}\sum_k\frac{\partial\mu_i}{\partial n_k}\operatorname{grad}n_k-\sum_i\frac{t_i}{e_i}Q_i^*\frac{\operatorname{grad}T}{T}. \quad (65)$$

Le cas spécial le plus intéressant est encore celui du mélange idéal (43) et isobare

$$a_{ik}=\delta_{ik}a_{ii}, \qquad \text{donc} \quad t_i=\frac{a_{ii}e_i^2}{\sum_i a_{ii}e_i^2}. \quad (66)$$

Alors l'équation générale (65) est

$$\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi_d+\operatorname{grad}\varphi_0$$
$$=-RT\sum_i\frac{t_i}{e_i}\frac{\operatorname{grad}n_i}{n_i}-\sum_i\frac{t_i}{e_i}Q^*\frac{\operatorname{grad}T}{T}. \quad (67)$$

Cette équation se prête très bien à une discussion de son contenu physique.

On peut naturellement trouver directement la relation (67) en appliquant (54) à l'équation du flux de matière (13, 22, 28, 35) dans un mélange idéal et isobare (66)

$$J_i=\frac{a_{ii}}{T}\left(-RT\frac{\operatorname{grad}n_i}{n_i}-e_i\operatorname{grad}\varphi-Q_i^*\frac{\operatorname{grad}T}{T}\right). \quad (68)$$

Le premier terme du second membre de (67), $\operatorname{grad}\varphi_d$, est l'expression connue du potentiel de diffusion ordinaire qui apparaît quand les vitesses de diffusion des ions sont différentes. Ce terme contient les nombres de transport $t_i$ qui sont reliés aux coefficients de diffusion ordinaire $D_i$. En effet, $D_i$ est par définition le coefficient de $\operatorname{grad}n_i$ dans l'expression du flux $J_i$ (68). Par suite

$$D_i=\frac{a_{ii}R}{n_i} \quad (69)$$

et avec (66)

$$t_i=\frac{n_iD_ie_i^2}{\sum_i n_iD_ie_i^2}, \quad (70)$$

$$J_i=D_i\left(-\operatorname{grad}n_i-\frac{e_in_i}{RT}\operatorname{grad}\varphi-\frac{Q_i^*n_i}{RT^2}\operatorname{grad}T\right). \quad (71)$$

La relation (69) est identique au théorème de Fokker-Einstein qu'on écrit souvent

$$D_i=U_iRT, \quad (72)$$

avec $U_i$ la « mobilité » de $i$. Cette mobilité est la vitesse moyenne de $i$ quand la force externe $X_i=1$

$$J_i=n_iv_i=a_{ii}X_i. \quad (73)$$

Pour $X_i=1$ on a $n_iU_i=a_{ii}$ et donc (69), comme il convient.

L'autre terme de (67), $\operatorname{grad}\varphi_0$, traduit l'influence de la non-uniformité de la température. Le coefficient de $\operatorname{grad}T$ contient les produits des nombres de transport $t_i$ et des chaleurs de transport $Q_i^*$. Ces produits sont une mesure de la diffusion thermique. Cette deuxième contribution à $\operatorname{grad}\varphi$ existe donc quand les chaleurs de transport des ions sont différentes. Il paraît donc naturel d'appeler ce terme « le potentiel de diffusion thermique » par

analogie avec le premier terme qui est l'expression du potentiel de diffusion ordinaire.

L'effet thermoélectrique homogène (67) a été trouvé pour l'état non stationnaire, c'est-à-dire à un instant arbitraire. Considérons maintenant comment grad $\varphi$ varie dans un mélange originairement homogène qui est plongé dans un champ de température grad $T$ au moment $t = 0$ et dans lequel s'opèrent les phénomènes de diffusion thermique et de diffusion ordinaire jusqu'à ce que l'état stationnaire soit atteint ($t = \infty$). Au moment où $t = 0$ les concentrations sont encore uniformes ($\text{grad}\, n_k = 0$), de sorte qu'il n'existe pas de potentiel de diffusion ordinaire. On a donc

$$\text{grad}\, \varphi_0 = -\sum_i \frac{t_i Q_i^*}{e_i} \frac{\text{grad}\, T}{T}, \tag{74}$$

c'est-à-dire que grad $\varphi$ pour $t = 0$ n'est que « le potentiel de diffusion thermique ». Pour la solution d'un sel avec $e_1 = \varepsilon$ et $e_2 = -\varepsilon$ (74) est

$$\varepsilon\, \text{grad}\, \varphi_0 = -(t_1 Q_1^* - t_2 Q_2^*) \frac{\text{grad}\, T}{T}. \tag{75}$$

Ce potentiel peut être déterminé aussitôt après le commencement d'une expérience.

Au fur et à mesure que les gradients de concentration s'établissent à cause de la diffusion thermique, un potentiel de diffusion se fera sentir. Le potentiel total est donné par (67). Pour la solution d'un électrolyte avec $e_1 = \varepsilon$ et $e_2 = -\varepsilon$

$$\text{grad}\, \varphi = \text{grad}\, \varphi_d + \text{grad}\, \varphi_0, \tag{76}$$

$$\text{grad}\, \varphi = -\frac{RT}{\varepsilon}(t_1 - t_2)\frac{\text{grad}\, n}{n} - (t_1 Q_1^* - t_2 Q_2^*)\frac{\text{grad}\, T}{\varepsilon T}. \tag{77}$$

A l'état stationnaire ($t = \infty$) on a $J_i = 0$ et pour l'effet Soret on trouve (48). En introduisant cette valeur dans l'équation générale de grad $\varphi$ on retrouve pour le mélange idéal

$$\text{grad}\, \varphi_\infty = -\frac{\sum_i e_i n_i Q_i^*}{\sum_i e_i^2 n_i} \frac{\text{grad}\, T}{T} \tag{78}$$

et pour $e_1 = \varepsilon$ et $e_2 = -\varepsilon$

$$\text{grad}\, \varphi_\infty = -\frac{Q_1^* - Q_2^*}{e_1 - e_2} \frac{\text{grad}\, T}{T} = -\frac{1}{2}(Q_1^* - Q_2^*)\frac{\text{grad}\, T}{\varepsilon T}, \tag{79}$$

équations déjà déduites [(44) et (52)], et qui ne contiennent plus les nombres de transport $t_i$. Cela est évident puisque à l'état stationnaire le transport est nul.

Dans la figure 1 l'effet thermoélectrique homogène dans une solution aqueuse d'un électrolyte avec $e_1 = \varepsilon$ et $e_2 = -\varepsilon$ est porté en fonction du temps.

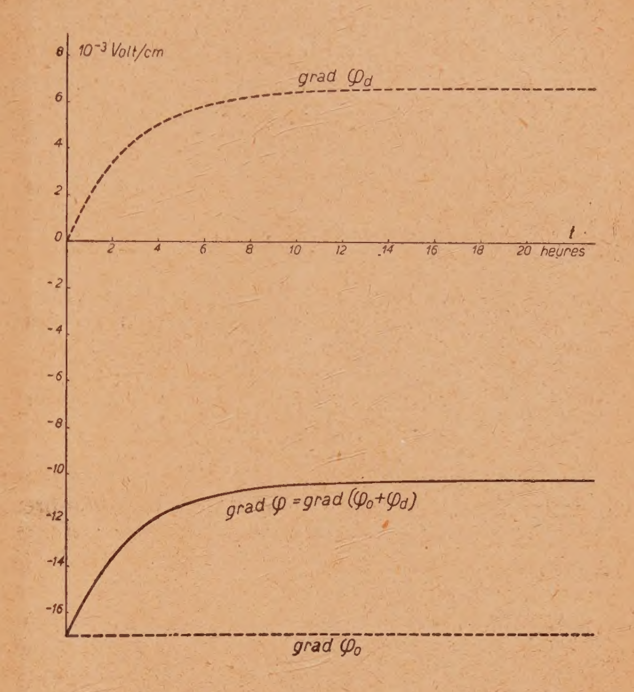



Fig. 1. — L'effet thermoélectrique homogène (grad $\varphi$) comme somme du potentiel de diffusion thermique (grad $\varphi_0$) et de diffusion ordinaire (grad $\varphi_d$) en fonction du temps $t$).

Pour calculer cette fonction il faut savoir comment grad $n$ varie. Cela ressort de la théorie phénoménologique [7] qui dit qu'approximativement grad $n$ s'établit suivant une loi exponentielle

$$\text{grad}\, n \sim \left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right) \tag{80}$$

avec $\Theta = \frac{a^2}{\pi^2 D}$, où $a$ est la hauteur d'un récipient dont la paroi supérieure a une température plus haute que la paroi inférieure. $D$ est le coefficient de diffusion. Pour le cas envisagé on peut écrire (80) en vertu de (48), qui est valable pour $t = \infty$ :

$$-\frac{1}{n}\frac{\text{grad}\, n}{\text{grad}\, T} = \frac{Q_1^* + Q_2^*}{2RT^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right). \tag{81}$$

En introduisant cette expression dans (77) on trouve

$$\text{grad}\, \varphi = \text{grad}\, \varphi_d + \text{grad}\, \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon T}\left\{\frac{1}{2}(t_1 - t_2)(Q_1^* + Q_2^*)\left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right) - (t_1 Q_1^* - t_2 Q_2^*)\right\}\text{grad}\, T \tag{82}$$

et par conséquent

$$\operatorname{grad} \varphi_{\infty} = -\frac{1}{2\varepsilon T}(Q_1^* - Q_2^*) \operatorname{grad} T. \qquad (83)$$

L'exemple de la figure 1 a été calculé à l'aide des valeurs numériques suivantes :

$a = 1$ cm, $D = 10^{-5}$ cm : s, $T = 300^{\circ}$K,
grad $T = 50$ degrés : cm, $t_1 = 0{,}8$, $t_2 = 0{,}2$,
$Q_1 = 3000$ cal : mol et $Q_2 = 100$ cal : mol.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. R. DE GROOT, *J. de Physique.*
[2] S. R. DE GROOT, L'effet Soret, diffusion thermique dans les phases condensées; 1945, Amsterdam (*voir* cette publication pour les questions suivantes, qui n'ont pas été traitées dans le présent mémoire : rapports entre la théorie thermodynamique des processus irréversibles et les théories quasi thermostatiques, discussions et comparaisons avec l'expérience, diffusion thermique à l'état non stationnaire). — R. CLARK JONES et W. H. FURRY, *Rev. Mod. Phys.*, 1946, **18**, p. 151. — *Voir* aussi les indications bibliographiques de la publication citée.
[3] L. DUFOUR, *Arch. Soc. Phys. et nat.*, (Genève), 1872, **45**, p. 9; *Ann. Physik*, sér. V, 1873, **28**, *n.* 490. — K. CLUSIUS et L. WALDMANN, *Naturwissenschaften*, 1942, **30**, p. 711. — L. WALDMANN, *Naturwissenschaften*, 1943, **31**, p. 204; *Z. Phys.*, 1943, **121**, p. 501; *J. de Physique*, sér. VIII, 1946, **7**, p. 129.
[4] E. D. EASTMAN, *J. Am. Chem. Soc.*, 1926, **48**, p. 1482; 1927, **49**, p. 794; 1928, **50**, p. 283 et 292. — W. H. RODEBUSH, *J. Am. Chem. Soc.*, 1927, **49**, p. 792. — EASTMAN, qui néglige parfois les termes électriques, n'arrive pas à des formules correctes sur l'effet Soret.
[5] C. WAGNER, *Ann. Physik*, sér. V, 1929, **3**, p. 627; 1930, **6**, p. 370.
[6] J. J. HERMANS, *Thèse*, Leyde, 1937, donne l'expression pour la force pour le cas où la température est uniforme.
[7] S. R. DE GROOT, *Physica*, 1942, **9**, p. 699.

# NOUVEAUX MODES DE FISSION DE L'URANIUM TRIPARTITION ET QUADRIPARTITION (*suite*)

Par TSIEN SAN-TSIANG, HO ZAH-WEI, R. CHASTEL et L. VIGNERON.
Laboratoire de Chimie nucléaire du Collège de France.

## V. COMPARAISON DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DES DIFFÉRENTS AUTEURS.

En même temps que les premières publications faites par nous (T. H. C. V.) en 1946 sur les preuves expérimentales de la tripartition [15] et de la quadripartition [16], Demers (D) a publié l'observation de trajectoires de fission de l'uranium dans l'émulsion photographique [17].

Il a utilisé une méthode très ingénieuse en disposant une couche mince d'uranate d'ammonium entre deux couches d'émulsion, le tout formant une sorte de « sandwich » dont les trois couches étaient adhérentes entre elles. Le point de fission se trouve dans la couche d'uranate d'ammonium et peut être repéré à 0,7 $\mu$ près (ou 0,1 cm d'air équivalent).

Il a observé de nombreuses bipartitions et aussi six cas dans lesquels une particule légère, qu'il suppose être une particule $\alpha$, part d'un point confondu avec le point de fission.

En mars 1947, Green et Livesey (G. L.) utilisant la même technique que nous ont publié leurs résultats sur l'émission d'une particule légère lors de la fission de l'uranium [18].

Dans le même mois, Farwell, Segré et Wiegand (F. S. W.) ont conclu par la méthode des coïncidences, que la troisième particule légère accompagnant la fission est une particule $\alpha$ [19].

*a.* **Fréquence d'émission du troisième fragment léger.** — Pour le rapport $\frac{\text{nombre de tripartitions}}{\text{nombre de bipartitions}}$ les résultats sont les suivants :

| T. H. C. V. | D. | G. L. | F. S. W. |
|---|---|---|---|
| 0,003 ± 0,001 | 0,004 ± 0,002 | 0,0029 ± 0,0003 | ∼ 0,004 |

Dans la limite des erreurs expérimentales, notre valeur s'accorde avec celles des différents auteurs.

*b.* **Parcours du troisième fragment léger.** — Green et Livesey donnent un parcours maximum

en accord avec le nôtre (45 cm). Si l'on compare les distributions statistiques (*fig.* 15), on voit que les courbes ont la même allure, le parcours le plus probable indiqué par eux est 27 cm alors que nous mêmes (T. H. C. V.) donnons 29 cm (écart inférieur aux erreurs expérimentales). Cependant nous avons observé pour les parcours longs ($R > 30$ cm) une fréquence plus grande que G. L. tandis que pour les parcours faibles ($R < 20$ cm) nous avons observé une fréquence plus faible.

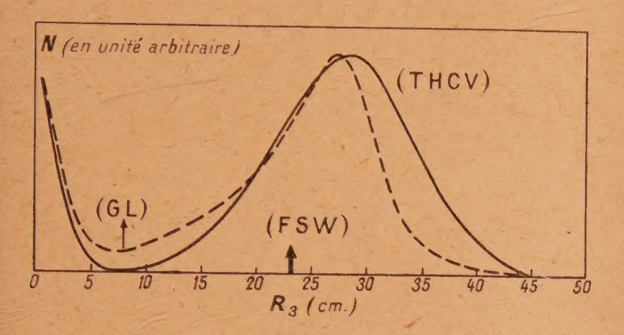



Fig. 15. — Comparaison de la distribution du parcours de $M_3$ obtenue par différents auteurs.

Demers a indiqué que parmi les six trajectoires qu'il a observées, une trajectoire a un parcours supérieur à 28 cm, ce qui est en accord avec nos résultats.

Par contre, Farwell, Segrè et Wiegand ont donné 23 cm comme valeur du parcours maximum, cette valeur semble être sous-estimée.

*c.* **Angle d'émission du troisième fragment léger.** — Le troisième fragment léger est émis *de préférence* dans une direction perpendiculaire à celle des deux fragments lourds. Nous avons donné (*fig.* 7 *b*) la distribution statistique des angles $\alpha_1$ et $\alpha_2$ que $M_3$ fait avec $M_1$ et $M_2$ et constaté que la courbe de distribution statistique de $\alpha_2$ est plus aigüe que celle de l'angle observé avec les trajectoires très courtes liées au centre de la trace de fissions (phénomènes non calculables qui pourraient être des tripartitions) décrites dans la section (III-B.-*h*.) (*voir* la figure 11 *b*). Contrairement à nous, G. L. n'ont pas trouvé de différence notable entre ces deux cas, D. et F. S. W. n'ont pas étudié ce problème.

*d.* **Temps d'émission du troisième fragment.** — La question qui se pose est la suivante : y a-t-il un intervalle de temps appréciable entre les deux phénomènes suivants 1° fission du noyau d'uranium 2° émission du troisième fragment ?

F. S. W. utilisant la méthode des coïncidences, ont conclu que cet intervalle de temps est inférieur à $5.10^{-6}$ s.

Demers a pu indiquer une limite plus serrée : au plus $2.10^{-14}$ s.

L'un de nous [29], considérant l'existence d'une *direction préférentielle* dans l'émission du fragment léger, en a conclu que l'intervalle de temps, s'il existe, est de l'ordre de la vie moyenne du noyau composé $^{236}_{92}$U, Dans le langage courant, on peut donc parler de *simultanéité de l'émission des trois fragments.*

Feather [30], par une discussion théorique basée sur des considérations analogues, conclut que l'intervalle de temps est très inférieur à $10^{-13}$ s.

Il semble qu'on soit maintenant généralement d'accord avec nos conclusions suivant lesquelles les trois fragments sont émis dans un intervalle de temps comparable avec la vie moyenne du noyau composé. Selon la préférence des auteurs il reste encore une nuance entre l'*hypothèse de la tripartition* et *celle d'une émission secondaire*; nous reviendrons sur ce point plus loin.

*e.* **Masse du troisième fragment.** — Farwell, Segrè et Wiegand ont, d'après des considérations d'ionisation, conclu que le troisième fragment est une particule $\alpha$. Leur calcul est basé sur un parcours maximum de 23 cm d'air pour le troisième fragment; étant donné qu'on sait maintenant que ce parcours peut atteindre 45 cm (soit à peu près le double) et que sa valeur la plus probable est environ 28 cm, il semble que leur calcul ait lieu d'être modifié.

Green et Livesey n'ont pas déterminé les masses dans leur publication. D'après une communication privée, ils ont calculé les masses tout récemment et obtenu pour $M_3$ une valeur moyenne d'environ 3,6.

D'après nos premiers résultats publiés, ainsi que par les cas que nous avons vu depuis, il semble que $M_3$ varie autour de la valeur **5**, toutes les valeurs calculées sauf une étant compatibles avec une valeur unique de $M_3 =$ **4**, **5**, **6** ou **7** (*voir* la note p. 211). Un cas spécial où $M_3 = 32$ montre que des valeurs très éloignées de 4 sont possibles pour $M_3$.

En conclusion, *il semble que le troisième fragment ait généralement des masses très légères* ($M_3 < 10$); *très probablement une partie des cas correspond à des particules* $\alpha$. Les résultats expérimentaux ne permettent pas d'exclure la possibilité d'avoir d'autres noyaux légers que $^4_2$He. *Une très petite proportion des cas correspond à des masses $M_3$ plus lourdes, complètement différentes de celle de la particule $\alpha$.* En conséquence, il n'est pas possible de conclure si $M_3$ a une masse unique, inférieure à 10 dans presque tous les cas, constituant ainsi une même classe de phénomènes (tandis que les cas, bien moins nombreux, où $M_3$ est plus lourd, constitueraient une classe de phénomènes distincte de la précédente) ou bien s'il y a un spectre de masses.

Il est donc souhaitable qu'une spectrographie de masse des produits de fission soit faite dans la région des poids atomiques légers ($M < 70$) en

employant une source intense de neutrons, par exemple une pile à uranium; ainsi la question pourrait être tranchée.

*f.* **Isotope responsable de la tripartition avec troisième fragment de long parcours.** — Nous avons conclu que ${}^{235}_{92}U$ est responsable de l'émission du troisième fragment de long parcours. Cette conclusion est appuyée par le fait que F. S. W. qui utilisaient un échantillon d'uranium enrichi en isotope ${}^{235}_{92}U$ ont observé la même fréquence du phénomène que nous. Ils ont étudié aussi la fission de ${}^{239}Pu$ par des neutrons lents et observé une fréquence moitié moindre du phénomène.

Dans un travail fait en collaboration avec Mme Faraggi, l'un de nous [27, 31] a montré que la fission de ${}^{232}_{90}Th$ par la capture d'un neutron rapide ne donne pas ce genre de phénomènes, résultat identique à celui de ${}^{238}_{92}U$ soumis à l'action des neutrons rapides.

*Tous ces faits nous conduisent à conclure que l'émission d'un troisième fragment de long parcours est un phénomène qui ne se produit pas avec tous les noyaux susceptibles de subir la fission et dont la proportion par rapport à la bipartition n'est pas la même pour tous les éléments qui y donnent lieu.*

## VI. CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES.

### A. La tripartition.

*a.* **Le modèle de la goutte liquide et la tripartition.** — D'après le modèle du noyau imaginé par Bohr, comparant le noyau à une goutte liquide, Present [14] a signalé le premier qu'une fission en trois fragments lourds chargés est dynamiquement possible par la capture d'un neutron. L'énergie d'activation serait la même que pour la bipartition et l'énergie libérée serait d'environ 10 à 20 MeV supérieure à celle de la bipartition.

Considérons une petite déformation arbitraire de la goutte liquide représentant le noyau composé ${}^{236}_{92}U$ telle que la distance du centre de la goutte à un point quelconque de colatitude $\theta$ sur la surface soit changée de sa valeur $R_0$ à la valeur

$$R(\theta) = R_0[1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos\theta) + \alpha_3 P_3(\cos\theta) + \alpha_4 P_4(\cos\theta) + \ldots]$$

où les $\alpha_n$ sont de petites quantités.

Bohr et Wheeler [13] ont montré que quand l'amplitude $\alpha_2$ du deuxième harmonique de déformation est importante, il y a possibilité de fission en deux fragments à peu près égaux.

Suivant les mêmes considérations, Present a indiqué qu'à une grande amplitude $\alpha_4$ du quatrième harmonique de déformation correspond un double étranglement le long de l'axe de révolution de la goutte allongée. Ces deux étranglements vont s'accentuer quand la goutte s'allonge et finalement il se forme trois gouttelettes alignées. Les grandeurs relatives des trois fragments dépendant des amplitudes et des phases des deuxième et quatrième harmoniques de déformation. D'après lui, parfois la dissymétrie probable pourrait provoquer la séparation d'un des fragments extérieurs en laissant les deux autres fragments dans un état excité, puis ceux-ci se sépareraient ensuite spontanément.

*b.* **Interprétation de la légèreté de la masse et de la direction d'émission du troisième fragment de long parcours.** — En utilisant l'image de la goutte liquide et l'hypothèse de la tripartition, l'un de nous a pu expliquer la direction de l'émission du troisième fragment léger [29]. Nous allons reprendre cette discussion et nous étendre sur d'autres observations.

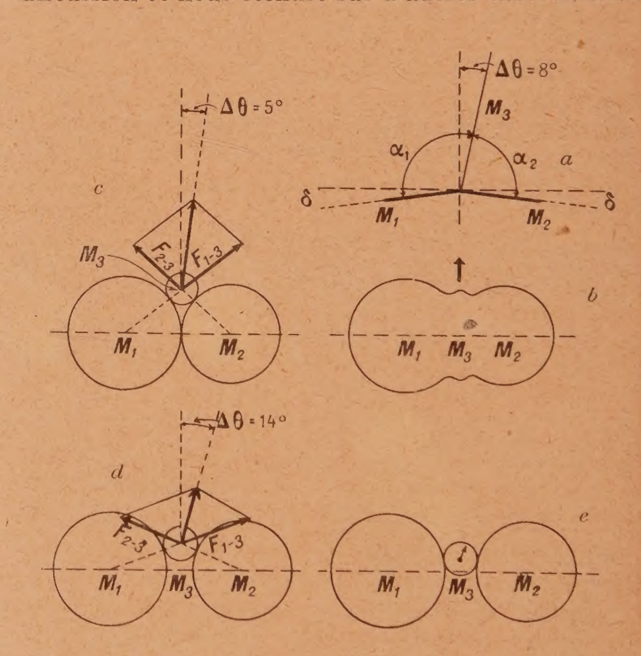



Fig. 16. — Schémas simplifiés de la tripartition. Les rayons des noyaux $M_1$ et $M_2$ sont calculés d'après la relation approchée $R = r_0 \times M^{\frac{1}{3}}$ où $r_0 = 1{,}5 \times 10^{-13}$ cm. Le rayon de $M_3$ est supposé celui d'une particule $\alpha$ ($R_\alpha \sim 2 \times 10^{-13}$ cm). *c*, trois noyaux en contact; *d*, $M_3$ est en contact avec $M_1$ et $M_2$ mais ces derniers sont séparés de $3 \times 10^{-13}$ cm; *e*, $M_3$ s'écarte très peu de l'axe de révolution du noyau alongé.

Expérimentalement, la fréquence de la bipartition est très grande devant celle de la tripartition et celle de la quadripartition, il en résulte que l'amplitude du deuxième harmonique est en général très

grande par rapport à celle des harmoniques d'ordre supérieur. Il semble naturel d'admettre que quand l'amplitude du quatrième harmonique atteint une intensité suffisante pour provoquer la formation d'une gouttelette centrale, cette amplitude soit petite et par suite que la gouttelette centrale soit de volume petit devant ceux des deux autres gouttelettes.

Supposons que par un effet de vibration violent, ou un effet de dissymétrie, $M_3$ se déplace légèrement hors de l'axe (*fig.* 16 *b*) tandis que les étranglements s'accentuent, on arrive au stade où les trois noyaux sont en contact, formant des noyaux indépendants (*fig.* 16 *c*, d). A partir de ce moment, les trois noyaux vont être projetés violemment; un des deux noyaux $M_1$, $M_2$ ($M_2$ pour fixer les idées), pourrait se détacher des deux autres suivant le schéma de Present tandis que $M_1$ et $M_3$ resteraient adhérents entre eux et ne se sépareraient qu'un peu plus tard. Si l'intervalle de temps séparant ces deux phases du phénomène était grand devant la vie moyenne, on ne s'expliquerait pas pourquoi $M_3$ est émis dans une *direction préférentielle perpendiculaire* à la direction de $M_2$.

Si au contraire, le temps qui s'écoule est tellement court qu'on peut considérer que les trois fragments sont séparés presque simultanément, $M_3$ va être projeté suivant la résultante des forces répulsives $F_{1-3}$ et $F_{2-3}$ qui sont proportionnelles aux charges $Z_1$ et $Z_2$ des fragments $M_1$ et $M_2$ et inversement proportionnelles aux carrés des rayons $R_1$ et $R_2$. En première approximation, nous pouvons prendre en moyenne [4]

$$Z_1 = 50 \quad \text{et} \quad Z_2 = 40$$

et

$$R_1 = 7,8.10^{-13}\ \text{cm} \quad \text{et} \quad R_2 = 7,0.10^{-13}\ \text{cm}.$$

Nous sommes ainsi conduits à $\Delta\theta = 5^{\circ}$ (*fig.* 16 *c*) et $\Delta\theta = 14^{\circ}$ (*fig.* 16 *d*). La valeur moyenne expérimentale de $\Delta\theta = \frac{1}{2}\ \Delta\alpha = 8^{\circ}$ (*fig.* 16 *a*) (*voir fig.* 7 *a*, section III, B, *c*) s'encadre parfaitement entre ces deux limites; *cette comparaison semble appuyer l'hypothèse de la simultanéité de la séparation des trois fragments.*

*c.* **Interprétation de la direction d'émission de la particule légère de faible énergie.** — Parmi les cas de fission de $^{235}$U et $^{238}$U (en mélange isotopique naturel) par la capture d'un neutron, nous avons observé, ainsi que Green et Livesey, qu'environ 1 pour 100 des traces de fission sont, dans leur partie centrale rectiligne, liées avec une trajectoire courte de particule légère. La technique photographique ne permet pas de déterminer la masse de ces particules. Probablement une partie de ces phénomènes correspond à la projection d'un noyau de la matière de l'émulsion par un fragment de fission juste au début de son parcours, phénomène déjà observé par F. Joliot au cours de ses travaux sur les rayons de recul $\alpha$ [32]. Mais les travaux non publiés de Feather et de ses collaborateurs [18] effectués par la méthode de coïncidence ainsi que l'existence d'une direction préférentielle d'émission (section III, B, *h*) semblent indiquer qu'au moins certaines de ces trajectoires, surtout celles qui sont émises dans la direction perpendiculaire, sont liées au phénomène de fission. Le même genre de phénomènes a été observé également par l'un de nous en collaboration avec M^me^ Faraggi dans le cas de la fission du thorium provoquée par des neutrons rapides [31].

Si nous admettons que ces particules sont émises en même temps que deux fragments lourds, l'angle moyen observé $\Delta\theta \sim 20^{\circ}$ (*fig.* 11 *b* et 14 *b*) correspondrait au cas où, au moment de la séparation, la gouttelette centrale est très peu écartée de l'axe de révolution de la goutte allongée (*fig.* 16 *e*). Les énergies observées de ces particules (1 ou 2 MeV) sont très inférieures à celle du troisième fragment de long parcours, elles s'accordent qualitativement avec le fait que la résultante des forces prévue par le schéma simplifié de la tripartition est plus faible dans le cas de la figure 16 *e* que dans le cas de la figure 16 *c*.

*d.* **Discussions.** — Dans l'interprétation de la tripartition par le modèle de la goutte liquide, l'amplitude du quatrième harmonique de déformation peut varier d'un cas à l'autre : il y correspondrait une variation de grandeur de la gouttelette centrale, c'est-à-dire qu'il semble naturel de prévoir un spectre de masses pour $M_3$, les petites masses étant plus avantagées que les grandes masses. Nos observations concordent avec ces prévisions.

Si nous regardons l'isotope responsable de la tripartition, l'accord ne paraît pas aussi satisfaisant : *a priori*, il ne devrait pas y avoir de différence entre le rapport $\frac{\text{Nombre de tripartitions}}{\text{Nombre de bipartitions}}$, pour les différents noyaux étudiés. Les observations expérimentales ont montré que l'émission de la particule légère de faible énergie est un phénomène commun à toutes les fissions étudiées, avec la même fréquence (1 pour 100 du nombre de bipartitions pour $^{235}$U, $^{238}$U et $^{232}$Th); par contre la tripartition avec émission d'un troisième fragment de long parcours a seulement lieu avec $^{235}$U et $^{239}$Pu, avec des fréquences différentes dans ces deux cas.

D'après le mécanisme de la tripartition déduit du modèle de la goutte liquide, nous ne voyons pas la raison pour laquelle l'émission d'une particule de long parcours n'a lieu qu'avec les noyaux facilement fissionables $^{235}$U et $^{239}$Pu.

Peut-être celà est-il lié à l'excitation des niveaux du noyau composé au-dessus du seuil de fission. *Il semble que les niveaux moins élevés favoriseraient la tripartition avec émission d'une particule de long parcours.* Cette idée est appuyée sur les faits suivants :

1° $^{239}Pu$ est plus facilement fissionable que $^{235}U$, après capture d'un neutron lent (d'énergie cinétique presque nulle) l'énergie d'excitation comptée au-dessus du seuil de la fission sera plus grande pour le noyau composé de plutonium que pour le noyau composé d'uranium; on constate que la fréquence du phénomène est plus grande avec l'uranium (Pu : 0,002; U : 0,004; nombres obtenus avec le même dispositif expérimental par Farwell, Segrè et Wiegand).

2° $^{238}U$ et $^{232}Th$ soumis par nous à l'action des neutrons rapides produits par les réactions Be-D ($E_D = 6,7$ MeV) n'ont pas donné de fréquences observables du phénomène; l'état d'excitation atteint pour le noyau composé, compté au-dessus du seuil de fission, était généralement plus élevé que dans les cas cités à l'alinéa précédent.

Il serait souhaitable, pour vérifier notre supposition, que des expériences soient entreprises avec des isotopes séparés $^{235}U$ et $^{238}U$ ainsi qu'avec $^{239}Pu$ soumis à des *neutrons monocinétiques* de différentes énergies.

### B. **L'émission d'une particule** $\alpha$.

*a*. **Réaction ($n$, $\alpha$), tripartition, ou radioactivité $\alpha$ ?** — L'aspect de l'ionisation du troisième fragment léger de long parcours semble indiquer qu'il s'agit d'une particule $\alpha$, bien connue dans les réactions nucléaires. Les expériences de Farwell, Segrè et Wiegand appuient cette hypothèse et nos observations, dans la majorité des cas ($M_3 < 10$), sont aussi compatibles avec une masse unique égale à 4 (section III, B, *d*).

L'étude de la direction d'émission de $M_3$ permet de donner des renseignements sur la nature intime du phénomène.

S'il s'agit d'une particule $\alpha$, trois possibilités sont à envisager : 1° réaction ($n$, $\alpha$) [33]; 2° tripartition [29]; 3° radioactivité $\alpha$ [30, 33], suivant que la particule $\alpha$ est émise, avant, pendant ou après la fission.

Si elle était émise avant la division du noyau (1°), sa direction serait de préférence suivant l'axe de la goutte déformée, car la barrière de potentiel est moins élevée dans cette direction [29].

Si elle était émise, après la fission (3°), par un des fragments lourds, sa direction aurait une distribution au hasard par rapport à ce fragment lourd [29].

*La direction préférentielle observée pour $M_3$ est perpendiculaire aux directions de $M_1$ et de $M_2$*, celà indique que si la particule $\alpha$ part avant ou après la fission des deux fragments lourds, l'intervalle de temps séparant les deux phénomènes est vraisemblablement très court [29]; il n'y a par conséquent pas possibilité de distinguer entre une réaction du type ($n$, $\alpha$) et une radioactivité $\alpha$ d'un des fragments de fission.

Tout ce que nous pouvons déduire de l'expérience, c'est que *la particule $\alpha$ est certainement émise sous l'influence presque égale et simultanée des champs coulombiens des deux noyaux lourds $M_1$ et $M_2$ : l'émission d'une particule $\alpha$ ne constituerait qu'un cas particulier de tripartition.*

La seule nuance entre l'hypothèse de la tripartition et celle d'une radioactivité $\alpha$ serait que si l'on parle de tripartition, on considère la gouttelette centrale comme préformée au moment de la fission, tandis que si on parle de radioactivité $\alpha$ (ou émission secondaire) on considère que la particule $\alpha$ se forme aux dépens d'un morceau de fission immédiatement après la séparation des deux morceaux lourds, cette dernière façon de voir s'accorde avec celle de Present dans son explication de la tripartition. Nous pensons qu'entre les deux façons de voir *il n'y a qu'une différence de phraséologie* puisqu'on ne peut pas préciser le temps très court qui séparerait les deux phénomènes successifs.

*b*. **Discussion sur une suggestion de Feather.** — En considérant la stabilité des noyaux excités vis-à-vis de la radioactivité $\alpha$, Feather [30] a suggéré que l'émission des trajectoires courtes (de faible énergie) serait due aux produits de fission de $Z \sim 40$ tandis que l'émission des trajectoires longues (de grande énergie) serait due aux produits de fission de $Z \sim 60$. Cette suggestion paraît très séduisante par sa simplicité, mais les faits suivants paraissent la contredire :

1° La masse moyenne du fragment $M_1$ de tripartition est 130, d'après l'étude des produits de fission de $^{235}U$ par les neutrons lents [4], ces masses correspondent plutôt à $Z \sim 50$ qu'à $Z \sim 60$. Les masses correspondantes de $Z \sim 60$ étant environ 150.

2° La masse du cas particulier $M_3 = 32$ est tout à fait hors de la zone $M_3 = 4$.

Il semble qu'au moins une partie des faits expérimentaux ne peut pas être expliquée par la suggestion de Feather.

## VII. **CONCLUSIONS.**

Utilisant la technique de la plaque photographique, nous avons mis en évidence la tripartition et la quadripartition du noyau composé $^{236}U$.

Dans le cas de la tripartition, les deux fragments lourds ont des parcours et des masses semblables à ceux qu'on observe avec la bipartition. Le troisième fragment a le plus souvent une masse inférieure à 10, mais il est arrivé que cette masse atteigne la valeur 32. Le parcours du troisième fragment varie de 2 cm à 45 cm d'air avec la valeur la plus

probable $28 \pm 2$ cm; sa direction est de préférence perpendiculaire à celles des deux fragments lourds. Les masses $M_3$ semblent former un spectre avec un maximum de probabilité vers la masse très légère $M_3 = 5$, cependant, en tenant compte des erreurs expérimentales, tous les cas sauf un sont compatibles avec une valeur unique de la masse comprise entre 4 et 7. L'énergie cinétique de tripartition $154 \pm 10$ MeV, légèrement supérieure à celle de la bipartition, est qualitativement en accord avec la prévision théorique. La fréquence du phénomène par rapport à celle de la bipartition est $0{,}003 \pm 0{,}001$.

Un groupe de particules de faible énergie (énergie probable : 1 à 2 MeV) semble être émis au moment de la fission. S'il entre dans la catégorie des phénomènes de tripartition, sa fréquence serait 0,01 de celle de la bipartition.

Deux cas de quadripartition ont été enregistrés; l'un correspond à quatre fragments lourds ($M > 20$), l'autre correspond à trois fragments lourds et un léger. L'énergie cinétique moyenne est environ 100 MeV, en bon accord avec la prévision théorique. La fréquence de la quadripartition par rapport à celle de la bipartition est $0{,}0002 \pm 0{,}00015$.

Dans le cas de la fission du noyau composé $^{239}$U, ni tripartition avec troisième fragment de long parcours, ni quadripartition n'ont été observées. Seule l'émission de la particule légère de parcours court a été enregistrée. Son énergie, sa fréquence et l'aspect du phénomène sont tout à fait semblables à ce qui a été observé avec le noyau composé $^{236}$U.

Une partie de ces résultats est confirmée par d'autres auteurs.

La discussion de la plupart des résultats concorde d'une façon satisfaisante avec le mécanisme de la tripartition déduit du modèle de la goutte liquide du noyau (les trois fragments se sont séparés presque simultanément). Le phénomène de tripartition avec l'émission du troisième fragment de long parcours pourrait être lié avec les niveaux moins élevés du noyau composé.

Nous exprimons notre profonde gratitude au Professeur F. Joliot pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et toutes les possibilités qu'il a mises à notre disposition pour le réaliser. Nous remercions également M^me^ le professeur I. Joliot-Curie pour la bienveillance avec laquelle elle a mis à notre disposition un excellent microscope pour l'examen des plaques. Nous remercions aussi MM. Savel et Suzor pour la facilité qu'ils nous ont donnée au cours des expériences avec le compteur β.

Nous remercions sincèrement le Dr Powell, de l'Université de Bristol (Angleterre) pour les émulsions photographiques qu'il nous a données avant qu'une fabrication en série en fut encore entreprise ainsi que pour l'hospitalité qu'il a donnée à deux d'entre nous, leur permettant d'étudier la technique de l'émulsion photographique indispensable pour réaliser notre travail.

Enfin nous remercions le Centre National de la Recherche Scientifique qui nous a donné la possibilité de poursuivre nos recherches.

## APPENDICE N° 1. — AFFAISSEMENT DE LA GÉLATINE APRÈS LE FIXAGE.

Les émulsions que nous avons employées ont sensiblement la composition suivante (d'après les indications du fabriquant Ilford Ltd) :

| | |
|---|---|
| BrAg........... | 82 pour 100 |
| Gélatine......... | 18 » |

Après développement et fixage, dans les conditions où nous avons opéré, la plaque reste pratiquement transparente; une partie infime des grains de bromure d'argent a été transformée en grains d'argent réduit.

Le départ du bromure d'argent a pour conséquence une diminution du volume de la couche de gélatine. Cette couche étant adhérente au verre de la plaque, la diminution de volume ne peut se faire que dans le sens vertical : la gélatine subira donc une sorte d' « affaissement ».

Il est facile de constater que cet affaissement se fait de façon régulière et n'est pas accompagné de déformations locales dans le plan horizontal. En effet, la trace laissée dans l'émulsion par un rayon α du polonium par exemple, reste rectiligne au cours des opérations de fixage et de développement, et ceci qu'elle soit peu ou très inclinée sur l'horizontale : on le constate immédiatement en observant une plaque au microscope. On constate aussi au microscope que la surface de la gélatine après fixage et développement est restée horizontale.

*a*. **Reconstitution des figures dans l'espace.** — Soit un phénomène nucléaire (choc d'une particule en projetant une autre, tripartition, quadripartition, etc.). Les longueurs qui ne sont pas horizontales, les angles qui n'ont pas leurs deux côtés horizontaux, subissent une déformation due à l'affaissement de la gélatine, il y aura lieu de reconstituer la figure dans l'espace telle qu'elle était dans la gélatine avant le développement, on opèrera en s'inspirant des règles suivantes :

α. les projections horizontales des longueurs se conservent;

β. les projections horizontales des angles se conservent;

γ. pour reconstituer la figure, il faut multiplier les cotes verticales mesurées après fixage par un fac-

teur $k$ supérieur à l'unité et qui ne dépend que de l'émulsion utilisée.

*b.* **Calcul approché du facteur** $k$. — Connaissant la densité du bromure d'argent cristallisé (6,46) et celle de la gélatine sèche (1,40 environ), nous avons, pour 1 g d'émulsion, :

| | | |
|---|---|---|
| Volume du bromure d'argent... | $\frac{0,82}{6,46}$ | $= 0,127$ cm³ |
| » de la gélatine......... | $\frac{0,18}{1,4}$ | $= 0,129$ cm³ |
| » de 1 g d'émulsion....... | | $0,256$ cm³ |

sachant qu'un volume de 0,129 après fixage correspond à un volume de 0,256 d'émulsion, le facteur $k$ par lequel il faut multiplier les cotes verticales obtenues est égal à

$$k = \frac{0.256}{0,129} = 1,97 \quad \text{(à 10 pour 100 près).}$$

Les causes d'erreur sont l'incertitude sur les proportions exactes de Br Ag et de gélatine et l'incertitude sur la densité de la gélatine sèche suivant sa provenance.

Une couche d'émulsion d'une épaisseur de $40\mu$ avant fixage, verra celui-ci réduire son épaisseur à $\frac{1}{k} \times 40\mu$, soit $20\mu$ environ.

*c.* **Détermination précise des facteurs** $k'$ **et** $k$ **de multiplication des cotes verticales.** — Le calcul précédent présente, comme nous l'avons vu, une certaine incertitude. Nous avons donc irradié dans le vide deux plaques « nuclear research $C_2$ » avec des rayons α provenant d'une source de polonium.

Dans une de ces plaques, les rayons α arrivaient tangentiellement à la surface de l'émulsion, une statistique des longueurs a donné, pour leur parcours, la valeur moyenne suivante : $l = 20,3$ divisions du micromètre oculaire (à 0,5 pour 100 près).

Dans la deuxième plaque, les rayons α arrivaient perpendiculairement à la surface de l'émulsion. Nous avons constaté qu'il était possible de suivre la trajectoire verticale au microscope. Leur longueur était mesurée au moyen d'un tambour gradué actionnant le mouvement vertical lent du microscope. Une statistique a donné, pour la longueur des traces, la valeur suivante : $l' = 4,88$ division de la roue (à 2 pour 100 près).

*Il en résulte que si une cote verticale après fixage a une mesure de $x$ divisions de la roue du mouvement lent, cette cote avant le développement avait la valeur suivante :* $k'x$ divisions du micromètre oculaire, avec

$$k' = \frac{20,3}{4,88} = 4,16 \quad \text{(à 3 pour 100 près).}$$

C'est sous cette forme que le résultat est le plus utilisable. On peut se proposer de calculer le facteur $k$ défini dans le paragraphe précédent. Une division du micromètre oculaire représente $1,05\mu$. La vis micrométrique avait été soigneusement étalonnée et au point où nous l'utilisions : une division de la roue vaut $1,87\mu$. Nous avions donc

$$20,3 \times 1,05\ \mu = k \times 4,88 \times 1,87\ \mu,$$

d'où

$$k = 2,33 \quad \text{à 10 pour 100 près.}$$

L'erreur relative sur $k$ est supérieure à l'erreur sur $k'$ car l'on ne connaît pas avec une grande précision la valeur en microns des divisions du micromètre oculaire ou de la roue verticale du mouvement lent.

On constate que les valeurs obtenues pour le facteur $k$ par calcul approché et par mesure directe de longueurs de traces sont compatibles.

Nos mesures et nos statistiques dans le plan horizontal sont effectuées avec l'unité suivante : division du micromètre oculaire. Ce n'est qu'ensuite que nous effectuons une transformation en microns. De même, l'unité de déplacement vertical est la division de la roue du mouvement lent, le micron, là aussi, n'est qu'une unité secondaire, il était donc plus commode pour nous d'utiliser le facteur $k'$ mesuré avec une meilleure précision. Mais ce facteur n'est valable que pour le microscope que nous avons utilisé. Au contraire, le facteur $k$ est valable d'une façon générale quel que soit le microscope employé.

Des mesures statistiques effectuées avec des rayons α dont la pente par rapport à l'horizontale était 45 ou 60° ont donné les mêmes valeurs pour $k'$ que les mesures avec une incidence verticale.

## APPENDICE N° 2. — CHOCS NUCLÉAIRES. DISTINCTION D'AVEC LES TRIPARTITIONS.

Lorsqu'on se trouve en présence de trois traces issues d'un même point de la gélatine (*fig.* 3), on peut être en présence d'une tripartition; en ce cas, les trois branches jouent des rôles symétriques.

Il ne faut pas se hâter de conclure, car on peut être en présence d'un simple choc nucléaire (ici les trois branches ne jouent plus des rôles semblables). La figure 17 représente un tel cas.

Un atome d'uranium s'est scindé au point O en deux fragments de masses $M$ et $N$. Le fragment $N$ s'est arrêté en T. Le fragment $M$, lancé en sens inverse en direction OR, a rencontré un noyau en P; dévié de son chemin, il s'est arrêté en S. Un noyau de masse $M^*$ primitivement au repos en P a été projeté par le choc, a laissé la trace PQ et s'est arrêté en Q.

Il est évident que rien ne signale le point O où s'est produit la fission, il est « quelque part entre T et P ».




Fig. 17. — En O : fission d'un noyau $U$ en deux masses $M$ et $N$. En P : choc de $M$ contre un noyau de masse $M^*$ précédemment immobile.

Appelons :

$V$, la vitesse de $M$ au point P, juste avant le choc;
$E$, l'énergie cinétique correspondante;
$V'$, la vitesse de $M$ au point P, juste après le choc;
$E'$, l'énergie cinétique correspondante;
$V^*$, la vitesse de $M^*$ au point P, juste après le choc;
$E^*$ l'énergie cinétique correspondante;
$p$, le rapport des masses $p = \frac{M}{M^*}$;
$q$, le rapport des vitesses des deux particules juste après le choc $q = \frac{V'}{V^*}$;
$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, les angles (voir *fig.* 17).

*a.* **Application des principes de la mécanique.** — L'application au point P des *principes de conservation de l'énergie cinétique et de l'impulsion* conduit facilement aux résultats suivants :

1° Relation entre les masses

$$p = \frac{M}{M^*} = \frac{\sin^2\gamma - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$

2° Relations entre les vitesses

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\sin\gamma\,\sin\alpha}{\sin^2\gamma - \sin^2\beta},$$

$$q = \frac{V'}{V^*} = \frac{\sin\beta\,\sin\alpha}{\sin^2\gamma - \sin^2\beta}, \qquad \frac{V}{V'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

3° Relations entre les énergies cinétiques

$$\frac{E}{E^*} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\gamma - \sin^2\beta},$$

$$\frac{E'}{E^*} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma - \sin^2\beta}, \qquad \frac{E}{E'} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}.$$

Il est très remarquable que *tous ces rapports puissent se déduire uniquement de la connaissance des angles de la figure* (sous réserve qu'on sache quelle branche TOP correspond à la particule incidente avant choc, quelle branche PS correspond à la particule déviée et quelle branche PQ correspond au noyau $M^*$ projeté).

4° *L'angle* $\beta$ *est toujours aigu;*

5° *L'angle* $\gamma$ *est toujours supérieur à l'angle* $\beta$;

6° Si $M^* < M$, l'angle $\alpha + \beta$ des deux particules après le choc est toujours aigu. Si $M^* = M$, l'angle $\alpha + \beta$ est toujours égal à $\frac{\pi}{2}$. Si $M^* > M$, l'angle $\alpha + \beta$ est toujours obtus $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi\right)$.

*b.* **Étude des différents chocs possibles.** — Si l'on se trouve en présence d'une étoile à trois branches, dans le cas général on ne sait pas quel rôle attribuer à chacune (il y a trois rôles possibles pour une branche : être le segment TP, le segment PS ou le segment PQ). Finalement, six figures de choc différentes sont possibles.

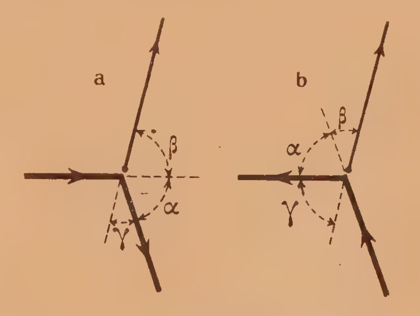



Fig. 18. — La particule projetante ne peut se déplacer dans le sens indiqué par les flèches de la figure 18 *a* car la condition $\gamma > \beta$ n'est pas vérifiée. Le sens de parcours indiqué par les flèches de la figure 18 *b* vérifie $\gamma > \beta$.

On démontre facilement que la condition angulaire $\gamma < \beta$ élimine dans tous les cas trois de ces figures : il reste donc trois figures de choc possibles.

*Simplifications* : Parfois on a des raisons sûres de connaître le rôle d'un segment; par exemple, si les particules $M$ proviennent toutes d'une même source, on reconnaîtra la particule incidente à sa direction. Dans l'étude de nos plaques, souvent deux branches de l'étoile étaient épaisses et la troisième avait une ionisation bien plus faible : elle ne pouvait pas être la trace d'un fragment de bipartition, c'était donc à coup sûr la particule projetée (si l'apparence était due à un choc); on se trouvait alors en présence de deux figures de choc possible, mais on démontre facilement que la condition angulaire $\gamma > \beta$ en élimine alors une dans tous les cas et qu'il ne reste qu'une figure de choc à étudier (*fig.* 18).

*c.* **Élimination du cas du choc.** — Lorsqu'on sait quelle est la particule incidente, quelle est la

particule émergente et quel est le noyau projeté, les angles caractéristiques $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ peuvent être lus sur la figure (*fig.* 18 *b*).

1° **Les rapports** $p$ **et** $q$ **peuvent être déterminés immédiatement** d'après les mesures de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les formules du paragraphe *a*.

2° **Choix provisoire d'une masse** $M^*$. — $M^*$ ne peut avoir qu'une des valeurs suivantes : 1, 12, 14, 16, 80, 108, 235-238 (masses des noyaux H, C, N, O, Br, Ag, U). Dans le cas (fréquent dans notre travail), où l'ionisation due au passage de $M^*$ est nettement plus faible que celle d'un fragment de fission et nettement plus forte que celle d'un proton, il ne reste que les valeurs 12, 14, 16. Si, au contraire, $M^*$ avait produit une trace épaisse, dans le genre de celles des fragments de fission, on ne pourrait prendre pour valeurs possibles de $M^*$ que 80, 108, 238.

On va alors choisir provisoirement une masse $M^*$, parmi celles qui sont possibles, par exemple $M^* = 12$ et l'on va rechercher si la figure observée peut correspondre à *la projection d'un noyau de carbone par un fragment de fission.*

3° **Calcul de** $M$ **par la formule** $M = pM^*$. — Ce calcul est immédiat, puisqu'on a déterminé $p$ au paragraphe 1°. Supposons que $p = 20$, $M^* = 12$, on aurait $M = 20 \times 12 = 240$, masse absolument excessive pour être celle d'un fragment de bipartition. Si $p = 2$, on trouverait $M = 2 \times 12 = 24$, valeur absolument insuffisante pour être la masse d'un fragment de bipartition. Dans ces deux cas, on pourrait, *sans aller plus loin, éliminer le cas d'un choc* contre un noyau de carbone.

Il arrive qu'on obtienne pour $M$ des valeurs tout à fait vraisemblables; ainsi, si $p$ calculé au paragraphe 1° était égal à 10, la masse $M = pM^*$ serait 120, valeur admissible.

4° **Confrontation des vitesses** $V'$ **obtenues de deux façons différentes.** — Si le calcul du paragraphe 3° donne pour $M$ une valeur vraisemblable, il faut pousser plus loin la discussion. Connaissant la valeur provisoirement admise pour $M^*$, et connaissant le parcours restant (longueur de la trace PR de $M^*$) on déduit immédiatement $V^*$. Le rapport $q$ a été calculé au paragraphe 1°, on calcule une *première valeur de* $V'$ par la formule $V' = qV^*$.

D'un autre côté, on a déterminé au paragraphe 3° la valeur de $M$, connaissant d'autre part la longueur de la trace PS de cette particule après le choc, on obtient immédiatement *une deuxième valeur de* $V'$.

Si les deux valeurs obtenues concordent dans la limite des erreurs expérimentales possibles, la figure peut être due à un choc.

5° **Essais de nouvelles valeurs pour** $M^*$. — Il peut arriver qu'en appliquant les opérations des paragraphes 3° et 4° à une masse provisoirement choisie, on arrive dans tous les cas à une absurdité. La valeur choisie pour $M^*$, 12 par exemple, ne peut pas convenir, mais il n'est pas dit qu'une autre valeur, 16 par exemple (noyau d'oxygène), ne puisse pas convenir. On recommencera donc les opérations des paragraphes 3° et 4° avec $M^* = 16$.

6° Il faut aussi tenir compte du fait que les rapports $p$ et $q$ ne sont pas connus avec une très grande précision puisqu'ils dépendent des angles lus sur la figure. Si l'angle $\alpha$ est petit, de faibles variations absolues de $\alpha$ causeront d'énormes variations sur $p$ et $q$ et il faudra en tenir compte en reprenant la discussion pour différentes valeurs admissibles pour $\alpha$ (par exemple faire la discussion pour $\alpha = 2°$, 3°, 4°, 5°, 6°, 7° si la valeur mesurée est $\alpha = 4°{,}5 \pm 2°{,}5$).

7° **Conclusion de la discussion.** — *a.* Si d'après la discussion menée comme il vient d'être dit, le choc n'est possible dans aucun cas, *on a donc affaire à une tripartition. b.* Dans certains cas, d'après la discussion ci-dessus, un choc peut interpréter l'apparence expérimentale, *on ne peut alors rien conclure* : cela peut être un choc, cela peut être une tripartition.

Il y aurait alors lieu de calculer $N = 236 - M$, masse du deuxième fragment de bipartition, et de voir si la branche PT correspondante a un parcours trop court (ou bien très excessif); on arriverait encore à éliminer quelques cas mais on conçoit que certaines apparences pourraient encore s'interpréter de deux façons, sans qu'on puisse conclure entre le choc et la tripartition. Quand de tel cas se sont présentés, nous n'en avons pas tenu compte dans la statistique des tripartitions.

Dans tous les cas où la trace légère avait un parcours supérieur à 4 cm d'air équivalent, nous avons constaté que l'hypothèse du choc conduisait à une incompatibilité. Il y avait donc tripartition.

## APPENDICE N° 3. — CALCUL DES TRIPARTITIONS ET DES QUADRIPARTITIONS PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

Reportons-nous au paragraphe *a* de la section III-B et à la figure 3 représentant une tripartition; on s'est donné arbitrairement deux axec rectangulaires O*x*, O*y* dans cette figure.

Pour les trois valeurs $R_1$, $R_2$, $R_3$ (longueurs en centimètres d'air équivalent des trois traces), nous construisons les trois courbes donnant la vitesse en fonction de la masse ainsi qu'il a été dit en III-B *a*.

*a.* **Système de trois équations donnant les** $M$. — Considérons les conditions de masse, $\Sigma M = 236$, et d'impulsion, $\Sigma M\vec{V} = 0$, définies en III-B *a*.

Cette dernière équation est une équation vectorielle; par projection sur les deux axes $Ox$, $Oy$, on voit qu'elle est équivalente aux deux premières équations du système ci-dessous :

$$\text{Système A} \left\{ \begin{array}{l} M_1 \alpha V_1 + M_2 \beta V_2 + M_3 \gamma V_3 = P_x = 0, \\ M_1 \alpha' V_1 + M_2 \beta' V_2 + M_3 \gamma' V_3 = P_y = 0, \\ M_1 + M_2 + M_3 = 236; \end{array} \right.$$

$\alpha, \alpha'$; $\beta, \beta'$; $\gamma, \gamma'$ sont les cosinus directeurs des directions des trois traces. Dans la figure 3, on a les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\sin\theta_2 = -0{,}174, \quad \gamma = \sin\theta_3 = 0{,}966,$$
$$\alpha' = -1, \quad \beta' = \cos\theta_2 = 0{,}985, \quad \gamma' = \cos\theta_3 = 0{,}259.$$

*Si l'on considère les V comme connus*, on remarque que le système A comprend trois équations linéaires à trois inconnues $M_1$, $M_2$, $M_3$. *On peut le résoudre par rapport à ces inconnues.*

Cette remarque nous a inspiré la méthode d'approximations successives suivante :

*b.* **Masses et vitesses par approximations successives.** — 1° **Départ.** — Commençons par prendre trois valeurs arbitraires pour les masses $M_1$, $M_2$, $M_3$. Afin de réduire le nombre des approximations, on s'efforcera qu'elles n'aient pas des valeurs trop éloignées de la solution et pour cela on se laissera guider dans le choix par des considérations d'ionisation des trois particules.

2° **Première approximation.** — *α. Vitesses.* — On lit les vitesses $V_1$, $V_2$, $V_3$ en regard des masses sur les courbes $V - M$ correspondant respectivement aux parcours $R_1$, $R_2$, $R_3$.

β. *Masses.* — Portant ces valeurs approchées des vitesses dans le système A, on le résout et l'on obtient pour les masses des valeurs mieux approchées que celles qu'on avait prises au départ.

3° **Deuxième approximation.** — *α. Vitesses.* — On lit les vitesses sur les courbes $V - M$ en prenant pour valeurs des masses celles qu'on a obtenues à la fin de l'approximation précédente.

β. *Masses.* — Portant ces vitesses dans le système A, on résout celui-ci et l'on a des valeurs des masses meilleures que dans l'approximation précédente.

4° **Approximations suivantes. Arrêt.** — On continue les approximations suivant le même principe. On constate qu'elles convergent rapidement : par exemple, les masses de la 4e approximation coïncident, *à moins d'une unité de masse près* avec celles de la 3e approximation. On peut alors s'arrêter et, *en prenant les entiers les plus voisins des masses obtenues, on a la solution.* En effet, le calcul algébrique conduirait, le plus souvent, à des masses non entières.

On constate que

$$P_x = M_1 \alpha V_1 + M_2 \beta V_2 + M_3 \gamma V_3$$

qui représente la projection $P_x$ de la résultante des impulsions sur l'axe $Ox$ est alors inférieure à 1 pour 100 de l'impulsion $M_1 V_1$ d'une des particules lourdes. Il en est de même de la projection de cette résultante sur $Oy$.

*La précision est limitée* par le fait que le manque de données expérimentales sur les relations $V - R$ pour certaines zones de masses entraîne une imprécision sur les courbes $V - M$ que nous avons construites. De plus, il y a une certaine fluctuation individuelle des parcours pour une même vitesse (ou de la vitesse pour un même parcours).

5° Nous donnons ci-dessous un exemple numérique des valeurs obtenues dans le cas du calcul de la tripartition de la figure 3 :

| | $M_1$. | $M_2$. | $M_3$. | $V_1$. | $V_2$. | $V_3$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs arbitraires prises au départ.... | 116 | 116 | 4 | | | |
| *1re approximation :* | | | | | | |
| Vitesses...... | | | | 11,0 | 12,5 | 25,3 |
| Masses......... | 122 | 104,6 | 9,4 | | | |
| *2e approximation :* | | | | | | |
| Vitesses...... | | | | 10,9 | 12,7 | 25,3 |
| Masses......... | 123,5 | 103,1 | 9,4 | | | |
| *3e approximation :* | | | | | | |
| Vitesses...... | | | | 10,9 | 12,8 | 25,3 |
| Masses......... | 124,1 | 102,6 | 9,3 | | | |
| *4e approximation :* | | | | | | |

Les valeurs des vitesses sont les mêmes que dans la 3e approximation, il en est par suite de même des masses.

On constate que dans la 1re approximation, la solution était atteinte à 2 pour 100 près des valeurs des masses.

Solution admise définitivement :

$$M_1 = 124, \quad M_2 = 703, \quad M_3 = 9.$$

Valeur de $M_1 V_1$ en unités arbitraires : 1352.

$p_x$ dans les mêmes unités : $-9 = 0{,}7$ pour 100 de $M_1 V_1$;

$p_y$ dans les mêmes unités : $9 = 0{,}7$ pour 100 de $M_1 V_1$;

Module de $\vec{p} = \Sigma M\vec{V}$ dans les mêmes unités :

$$\sqrt{(9)^2 + (9)^2} \sim 13,$$

soit 1 pour 100 de $M_1 V_1$.

6° **Cas où des neutrons seraient émis.** —

Imaginons qu'on connaisse leur nombre ainsi que la direction de leur vitesse, le calcul ci-dessus resterait valable à condition qu'on introduise un deuxième membre non nul (projection sur $Ox$ ou $Oy$ de l'impulsion totale des neutrons) dans les deux premières équations du système A et qu'on remplace dans la troisième équation 236 par 233, 234 ou 235, suivant qu'il y aurait eu 3, 2 ou 1 neutrons émis. Il est impossible de connaître ces corrections et l'on devra résoudre le système A comme si aucun neutron n'était émis. Remarquons qu'en appelant $h$ l'impulsion d'un neutron de 4 MeV, l'impulsion d'une particule $\alpha$ de 16 MeV sera $4h$, l'impulsion d'un fragment de fission de masse 140 et d'énergie 60 MeV sera $46h$.

On en déduit que l'erreur commise en négligeant les neutrons qui pourraient être émis introduit, dans le calcul, une erreur de 2 pour 100 au plus sur la masse des deux fragments lourds de la tripartition et une erreur qui peut atteindre environ une unité de masse sur la masse du fragment léger.

*c.* **Calcul des quadripartitions par approximations successives.** — Nous pensons que, dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que les quatre traces soient coplanaires. On considérera trois axes rectangulaires de coordonnées, le système A comportera *une équation de plus* (projection de l'impulsion résultante sur $Oz = 0$).

*Il y a une inconnue de plus* ($M_4$).

Le système se résoudra en suivant exactement une marche calquée sur celle qu'on utilise dans les tripartitions. *La solution compatible avec l'aspect expérimental sera unique.*

Si les quatre particules sont coplanaires, une des quatre équations du système A disparaît, il y a donc quatre inconnues et trois équations, on pourra se donner une valeur arbitraire pour $M_1$ et calculer les trois autres masses; on obtiendra ainsi une première solution. Ensuite, on se donnera d'autres valeurs arbitraires pour $M_1$, il y aura une simple infinité de solutions compatibles avec l'aspect expérimental.

En fait, dans la première quadripartition que nous avons observée, les quatre traces étaient sensiblement coplanaires. Dans la deuxième, les trois traces lourdes étaient presque coplanaires, cependant l'aspect de l'ionisation (et aussi des considérations géométriques) imposait $3 < M_4 < 6$; dans ce cas, une solution unique a pu être calculée en posant $M_4 = 4$, l'erreur commise sur $M_4$ ne retentissant pas beaucoup sur les autres masses.

S'il y avait plus de quatre particules émises, le nombre des inconnues augmenterait, tandis que le nombre des équations du système A resterait égal à 4. Il y aurait donc indétermination.

## APPENDICE N° 4. — CALCUL DES TRIPARTITIONS PAR UNE MÉTHODE GRAPHIQUE.

La méthode que nous allons exposer est strictement équivalente à celle qui a été exposée dans l'Appendice n° 3; l'emploi de constructions graphiques évite d'avoir plusieurs fois de suite à résoudre algébriquement un système de trois équations à trois inconnues.

On commencera par construire les trois courbes donnant l'impulsion en fonction de la masse pour les trois parcours $R_1$, $R_2$, $R_3$.

Les projections $p_x$ et $p_y$ de l'impulsion totale

$$\vec{p} = \Sigma M\vec{V}.$$

sur $Ox$ et $Oy$ sont

$$p_x = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3,$$
$$p_y = \alpha' p_1 + \beta' p_2 + \gamma' p_3,$$

$p_1$, $p_2$, $p_3$ étant respectivement les impulsions $M_1V_1$, $M_2V_2$, $M_3V_3$. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ étant les cosinus directeurs des directions des trois traces par rapport aux axes $Ox$ et $Oy$ de la figure 3).

Si les valeurs des masses $M_1$, $M_2$, $M_3$ sont correctes, en déterminant les impulsions $p_1$, $p_2$, $p_3$ au moyen des courbes $MV = f(V)$, on trouvera, pour $p_x$ et $p_y$ des valeurs nulles et, par suite, le module de l'impulsion résultante sera nul

$$|\vec{p}| = p = \sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2} = 0.$$

Fig. 19. — $\gamma$, $\gamma'$ : courbes d'égal module de l'impulsion résultante $p$; Z : point où $p = 0$.

Si les valeurs de $M_1\,M_2\,M_3$ ne sont pas celles qui

correspondent à la solution, $p_x$ et $p_y$ ne seront pas simultanément nuls, $\vec{p}$ sera différent de zéro.

Prenons une feuille de papier quadrillé (*fig.* 19) avec deux axes $OM_1$, $OM_2$. Au point A de la figure correspondent $M_1 = 100$, $M_2 = 120$ *et, par suite,* $M_3 = 236 - (M_1 + M_2) = 16$ (condition de masse).

Prenons comme unité des impulsions, celle qu'aurait une particule de masse 1 animée d'une vitesse de $10^8$ cm : s. L'impulsion d'un fragment lourd de bipartition est de l'ordre de 1300 unités, celle d'une particule $\alpha$ de 20 MeV est 122 unités, celle d'un neutron de 4 MeV est 27 unités.

Calculons $p$ pour le point A, soit $p = 130$ pour fixer les idées, inscrivons 130 à côté du point A. Opérons de même pour un certain nombre de points B, C, D, E, F, G, H, I, etc. du graphique. Entre ces points, il est facile de faire des interpolations paraboliques graphiques et de déterminer des points $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, $v$, où $p$ est égal à 50 unités. Ces points seront joints par une courbe $\gamma$.

La courbe $\gamma$ est le lieu des points tels que le module de $\vec{p}$ soit égal à 50 unités. C'est une courbe fermée. La courbe $\gamma'$, lieu des points où $p$ est égal à 150 unités entoure la courbe $\gamma$.

Le point Z correspondant à la solution sera entouré par la courbe $\gamma$, cette dernière ayant une forme régulière, on apprécie facilement la position de Z quand les courbes $\gamma$ et $\gamma'$ ont été tracées.

On calculera, à titre de vérification, la valeur de $p$ pour les masses $M_1$, $M_2$, $M_3$ correspondant au point Z qu'on vient de déterminer graphiquement, on s'estimera satisfait si $p < 25$, c'est-à-dire si la compensation des impulsions a lieu à 2 pour 100 près de l'impulsion d'un fragment de bipartition. Si cela n'a pas lieu, une légère retouche du point Z faisant varier les masses de 1 ou 2 unités fournira la solution.

L'avantage de cette méthode graphique est qu'on se rend immédiatement compte de l'ordre de grandeur de la précision (quantité dont on peut faire varier les masses si l'on admet que $p$ atteigne la valeur 25, soit 2 pour 100 de l'impulsion d'un fragment de bipartition). Sur la figure 19, toute combinaison de masses figurée par un point intérieur à la courbe $\gamma''$ ($p = 25$) peut être considérée comme possible.

*Remarque.* — Dans une quadripartition, il y a une masse $M_4$ en plus, cette méthode ne s'applique donc pas, car il faudrait faire un graphique $OM_1M_2M_3$ dans l'espace, ce qui ne serait pas commode.

**Note ajoutée à la correction.** — Dans le calcul de la masse de $M_3$, nous avons utilisé, comme première approximation, la relation entre $R$ et $V$ pour la particule $\alpha$. Étant donnée la relation théorique $R = \frac{M}{Z^2} f(V)$ et la charge $Z$ de $M_3$ étant inconnue, nous avons introduit une erreur incontrôlable sur la masse de $M_3$. Pour la valeur calculée de $M_3 \neq 4$, l'erreur estimée serait environ une unité de masse.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] I. Curie et P. Savitch, *J. de Physique*, 1938, **9**, p. 355. — O. Hahn et F. Strassmann, *Naturwiss*, 1939, **27**, p. 11 et 89.
[2] L. Meitner et O. R. Frisch, *Nature*, 1939, **143**, p. 239. — O. R. Frisch, *Nature*, 1939, **143**, p. 276. — F. Joliot, *C. R. Acad. Sc.*, 1939, **208**, p. 341, etc...
[3] L. A. Turner, *Rev. Mod. Phys.*, 1940, **12**, p. 1.
[4] Plutonium project, *Rev. Mod. Phys.*, 1946, **18**, p. 513.
[5] A. Flammersfeld, P. Jensen et W. Gentner, *Z. f. Phys.*, 1943, **120**, p. 450.
[6] H. v. Halban, F. Joliot et L. Kowarski, *Nature*, 1939, **143**, p. 470 et 680. — H. L. Anderson, E. Fermi et H. B. Hanstein, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 797.
[7] F. Joliot, *C. R. Acad. Sc.*, 1939, **208**, p. 647 et *J. de Physique*, 1939, **10**, p. 159. — D. R. Corson et R. L. Thornton, *Phys. Rev.*, 1939, **55**, p. 509.
[8] J. K. Bøggild, K. J. Brostrøm et J. Lauritsen, *Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Math.-fys. Medd.*, 1940, **28**, p. 1 et F. Joliot, *C. R. Acad. Sc.*, 1944, **218**, p. 488.
[9] N. Bohr, *Phys. Rev.*, 1940, **58**, p. 654 et 1941, **59**, p. 270.
[10] M. H. Kanner et H. H. Barshall, *Phys. Rev.*, 1940, **57**, p. 372.
[11] W. Jentschke, *Z. f. Phys.*, 1943, **120**, p. 165.
[12] Tsien San-Tsiang, Ho Zah-Wei et H. Faraggi, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **223**, p. 825. *Voir* [31].
[13] N. Bohr et J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, 1939, **56**, p. 426.
[14] R. D. Present, *Phys. Rev.*, 1941, **59**, p. 466.
[15] Tsien San-Tsiang, R. Chastel, Ho Zah-Wei et L. Vigneron, *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **223**, p. 986.
[16] Ho Zah-Wei, Tsien San-Tsiang, L. Vigneron et R. Chastel, *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **223**, p. 1119.
[17] P. Demers, *Phys. Rev.*, 1946, **70**, p. 974.
[18] L. L. Green et D. L. Livesey, *Nature*, 1947, **159**, p. 332.
[19] G. Farwell, E. Segrè et C. Wiegand, *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 327.
[20] C. F. Powell, G. P. S. Occhialini, D. L. Livesey et L. V. Chilton, *J. Scient. Instr.*, 1946, **23**, p. 102.
[21] Tsien San-Tsiang, R. Chastel, H. Faraggi et L. Vigneron, *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **223**, p. 571.
[22] L. L. Green et D. L. Livesey, *Nature*, 1946, **158**, p. 272.
[23] O. J. Knipp et E. Teller, *Phys. Rev.*, 1941, **59**, p. 659.
[24] M. G. Holloway et S. Livingstone, *Phys. Rev.*, 1938, **54**, p. 18 et S. Livingstone et H. A. Bethe, *Rev. Mod. Phys.*, 1937, **9**, p. 246.
[25] Tsien San-Tsiang, Ho Zah-Wei, R. Chastel et L. Vigneron, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, p. 272.
[26] Tsien San-Tsiang, Ho Zah-Wei, R. Chastel et L. Vigneron, *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 382.
[27] Tsien San-Tsiang, Ho Zah-Wei, L. Vigneron et R. Chastel, *Nature*, 1947, **159**, p. 773.
[28] H. v. Halban, F. Joliot et L. Kowarski, *Nature*, 1939, **143**, p. 939.
[29] Tsien San-Tsiang, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, p. 1056. — J. A. Wheeler, communication privée.
[30] N. Feather, *Nature*, 1947, **159**, p. 607.
[31] Tsien San-Tsiang et H. Faraggi, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, p. 294.
[32] F. Joliot, *J. de Physique*, 1934, **5**, p. 219.
[33] B. Kwal, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, p. 563.

# DÉTERMINATION DE LA VALEUR LA PLUS PROBABLE DES GRANDEURS STATISTIQUES
## I. GÉNÉRALITÉS

Par Georges ALLARD.

**Sommaire.** — Résolution du problème suivant : soit $x$ une certaine grandeur mesurable pour des particules individuelles; la probabilité pour que $x$ soit compris entre $x_1$ et $x_2$ dépend de $l$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$; des expériences effectuées sur un grand nombre de particules montrent qu'il y en a $n_1$ pour lesquelles $x$ est compris entre $x_0$ et $x_1$, $n_2$ pour lesquelles $x$ est compris entre $x_1$ et $x_2, \ldots$; déterminer la valeur la plus probable des $l$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ et les écarts quadratiques moyens correspondant $\overline{\delta\alpha_1^2}, \ldots, \overline{\delta\alpha_l^2}$.

Dans un mémoire des *Proceedings of the Royal Society of London* (1), Peierls a étudié la précision des mesures effectuées au moyen de compteurs. Il m'a paru intéressant de reprendre ce travail en le généralisant et en précisant certains des points qui y sont traités. Nous examinerons ici le problème sous sa forme la plus générale, réservant pour un article ultérieur l'application à la détermination des vies moyennes.

D'une façon générale, nous poserons le problème de la façon suivante. Soit $x$ une certaine grandeur mesurable pour des particules individuelles; supposons que la probabilité pour qu'une particule corresponde à $x$ compris entre $x_1$ et $x_2$ soit une fonction connue $w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ de $x_1, x_2$ et de $l$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$. On observe un ensemble de particules parmi lesquelles $n_1$ ont un $x$ compris entre $x_0$ et $x_1$, $n_2$ entre $x_1$ et $x_2, \ldots, n_k$ entre $x_{k-1}$ et $x_k, \ldots$, et l'on se propose de déterminer, d'une part, la valeur la plus probable des paramètres $\alpha_l$; d'autre part, les écarts quadratiques moyens $\overline{\delta\alpha_l^2}$, c'est-à-dire la précision avec laquelle les $\alpha_l$ sont déterminés. Dans les problèmes traités par Peierls, la grandeur $x$ est le temps, mais ce pourra être tout autre chose, par exemple l'énergie.

Nous poserons

$$\begin{aligned} w_\nu &= w(x_\nu, x_{\nu-1}, \alpha_1 \ldots \alpha_l) \\ &= w(x_\nu, x_0, \alpha_1 \ldots) - w(x_{\nu-1}, x_0, \alpha_1 \ldots) \\ w &= \sum_\nu w_\nu = w(x_k, x_0, \alpha_1 \ldots \alpha_l) \\ m &= \sum_\nu n_\nu. \end{aligned}$$

Les $\alpha_l$ étant supposés connus, la probabilité pour qu'on observe précisément $n_1$ particules dans l'intervalle $(x_0 x_1)$, $n_2$ dans l'intervalle $(x_1 x_2), \ldots$, est donnée par

$$p = \frac{M!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!\, (M-m)!} w_1^{n_1} w_2^{n_2} \ldots w_k^{n_k} (1-w)^{M-m},$$

$M$ étant le nombre total de particules qu'on aurait observées si toutes les valeurs possibles de $x$ avaient été réalisées dans les expériences.

Admettons maintenant, comme on le fait couramment en probabilité des causes, que la probabilité *a priori* pour que $M$ ait une valeur déterminée, supérieure à $m$, est indépendante de cette valeur, c'est-à-dire que toutes les valeurs sont également probables, et que la probabilité *a priori* pour que $\alpha_i$ ait une valeur comprise entre $\alpha_i$ et $\alpha_i + \mathrm{d}\alpha_i$ est proportionnelle à $\mathrm{d}\alpha_i$. La formule de Bayes nous donnera la probabilité *a posteriori*

$$P = \frac{p\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2 \ldots \mathrm{d}\alpha_l}{\iint \cdots \int \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_l \sum_{M=m}^{\infty} p}.$$

Le dénominateur ne dépendra évidemment plus de $M$ ni des $\alpha_i$, mais seulement des $n_\nu$ et l'on pourra écrire

$$P = K(n_\nu) \frac{M!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!\, (M-m)!} \times w_1^{n_1} w_2^{n_2} \ldots w_k^{n_k} (1-w)^{M-m}\, \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_l \qquad (1)$$

ou encore

$$P = (K n_\nu) \frac{M!}{m!\,(M-m)!} w^m (1-w)^{M-m} \times \frac{m!}{n_1! \ldots n_k!} \frac{w_1^{n_1} \ldots w_k^{n_k}}{w^m} \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_l.$$

Si $M$ et $m$ sont tous deux très grands, un calcul classique donne

$$\frac{M!}{m!\,(M-m)!} w^m (1-w)^{M-m} \# \frac{1}{\sqrt{2\pi M w (1-w)}} e^{-\frac{(m-Mw)^2}{2Mw(1-w)}}.$$

(1) *Proc. Roy. Soc.*, London, Série A, avril 1935, n° 868, vol. 149, p. 467-486.

Nous pouvons en conclure que $P$ n'a de valeur appréciable que si $m \neq Mw$; or, nous ferons constamment l'hypothèse que les résultats expérimentaux son ceux qui rendent $P$ maximum. Donc

$$P = \frac{K(n_\nu)}{\sqrt{2\pi m(1-w)}} \frac{m!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \frac{w_1^{n_1} w_2^{n_2} \ldots w_k^{n_k}}{w^m} d\alpha_1 \ldots d\alpha_l.$$

En négligeant le facteur $\sqrt{1-w}$, qui varie peu, on écrira encore

$$\log P = \text{const.} + \sum_\nu n_\nu \log w_\nu - m \log w. \tag{2}$$

Les paramètres $\alpha_i$ devront alors être tels qu'ils rendent $P$ maximum, ce qui conduit aux équations

$$\sum_\nu \frac{n_\nu}{w_\nu} \frac{\partial w_\nu}{\partial \alpha_i} = \frac{m}{w} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \tag{3}$$

en nombre suffisant pour déterminer les $\alpha_i$.

Pour une variation assez faible $\delta\alpha_i$ des $\alpha_i$, la probabilité $P$ deviendra

$$\log P = \log P_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 \log P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right)_0 \delta\alpha_i\, \delta\alpha_j$$

le symbole $\left( \frac{\partial^2 \log P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right)_0$, que nous représenterons aussi par $A_{ij}$ signifiant qu'on a remplacé, dans $\frac{\partial^2 \log P}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_j}$, les $\alpha_i$ par leur valeur tirée de (3). La somme double qui figure dans le second membre est une forme quadratique en $\delta\alpha_i$ qui doit être définie négative pour que $P_0$ soit effectivement un maximum. Une substitution linéaire convenable permettra de la mettre sous la forme $-\Sigma_s \beta_s^2$. Les valeurs quadratiques moyennes sont

$$\overline{\beta_s^2} = 1, \qquad \overline{\beta_s \beta_t} = 0, \qquad (t \neq s).$$

d'où l'on peut déduire les valeurs moyennes $\overline{\delta\alpha_i\, \delta\alpha_j}$. On peut effectuer le calcul très simplement de la façon suivante. Isolant un indice $k$ bien déterminé, on a

$$\sum_{i,j} A_{ij}\, \delta\alpha_i \delta\alpha_j = A_{kk}\, \delta\alpha_k^2 + 2 \sum_{i \neq k} A_{ik}\, \delta\alpha_i\, \delta\alpha_k + \sum_{i,j \neq k} A_{ij}\, \delta\alpha_i\, \delta\alpha_j$$

$$= \left( \sqrt{A_{kk}}\, \delta\alpha_k + \frac{\sum_{i \neq k} A_{ik}\, \delta\alpha_i}{\sqrt{A_{kk}}} \right)^2 + \sum_{i,j \neq k} A_{ij}\, \delta\alpha_i\, \delta\alpha_j - \frac{\left( \sum_{i \neq k} A_{ik} \delta\alpha_i \right)^2}{A_{kk}}$$

$\delta\alpha_k$ ne figurant que dans le premier terme, on est sûr que

$$\overline{\delta\alpha_i \left( \delta\alpha_k \sqrt{A_{kk}} + \frac{\sum_{j \neq k} A_{jk}\, \delta\alpha_j}{\sqrt{A_{kk}}} \right)} = 0$$

ou

$$\sum_j A_{jk}\, \overline{\delta\alpha_i\, \delta\alpha_j} = 0 \qquad (i \neq k),$$

$$\overline{\left( \delta\alpha_k \sqrt{A_{kk}} + \frac{\sum_{j \neq k} A_{jk}\, \delta\alpha_j}{\sqrt{A_{kk}}} \right)^2} = -1$$

ou

$$\overline{\left( \sum_j A_{jk}\, \delta\alpha_j \right)^2} = -A_{kk}.$$

Or, l'on peut écrire

$$\overline{\left( \sum_j A_{jk}\, \delta\alpha_j \right)^2} = \sum_{ij} A_{ik} A_{jk}\, \overline{\delta\alpha_i\, \delta\alpha_j} = \sum_i A_{ik} \sum_j A_{jk}\, \overline{\delta\alpha_i\, \delta\alpha_j}.$$

On a donc, d'après les deux relations précédentes

$$-A_{kk} = A_{kk} \sum_j A_{jk}\, \overline{\delta\alpha_j\, \delta\alpha_k} \qquad \text{ou} \qquad \sum_j A_{jk}\, \overline{\delta\alpha_j\, \delta\alpha_k} = -1.$$

Tous ces résultats peuvent être groupés en

$$\sum_j A_{jk}\, \overline{\delta\alpha_i\, \delta\alpha_j} = -\delta_{ik} = \begin{cases} -1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

et ces relations sont vraies pour tous les indices $i$ et $k$. Donnant alors à $i$ une valeur fixe et faisant varier $k$, nous obtiendrons $l$ équations linéaires avec $l$ inconnues $\overline{\delta\alpha_i\, \delta\alpha_j}$. La résolution est facile. Soit $\Delta$ le déterminant des $A_{ij}$ et $B_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial A_{ij}}$; on a

$$\overline{\delta\alpha_i\, \delta\alpha_j} = -\frac{B_{ij}}{\Delta}, \tag{4}$$

ce qui résout entièrement le problème. Si par exemple il n'y a que deux paramètres $\alpha_1$ et $\alpha_2$, on a

$$\Delta = A_{11} A_{22} - A_{12}^2,$$

$$\overline{\delta\alpha_1^2} = -\frac{A_{22}}{\Delta}, \qquad \overline{\delta\alpha_1\, \delta\alpha_2} = \frac{A_{12}}{\Delta}, \qquad \overline{\delta\alpha_2^2} = -\frac{A_{11}}{\Delta}.$$

On peut remarquer que, $\overline{\delta\alpha_1^2}$ et $\overline{\delta\alpha_2^2}$ étant certainement positifs, cela implique

$$A_{11} < 0, \qquad A_{22} < 0, \qquad A_{11} A_{22} > A_{12}^2 > 0$$

et l'on en conclut

$$\overline{\delta\alpha_1^2} > -\frac{1}{A_{11}}, \qquad \overline{\delta\alpha_2^2} > -\frac{1}{A_{22}},$$

ce qui donne une limite inférieure de $\overline{\delta\alpha_1^2}$ et $\overline{\delta\alpha_2^2}$.

Le problème important est donc le calcul effectif des $A_{ij}$. On a

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_j} = \sum_\nu \frac{n_\nu}{w_\nu} \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_j} - \sum_\nu \frac{n_\nu}{w_\nu^2} \frac{\partial w_\nu}{\partial \alpha_i} \frac{\partial w_\nu}{\partial \alpha_j} - \frac{m}{w} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_j} + \frac{m}{w^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j}.$$

Mais pour calculer $A_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right)_0$, on peut, sans grande erreur, remplacer $n_\nu$ par sa valeur moyenne $Mw_\nu$ et $m$ par $Mw$ et se servir de

$$\sum_\nu w_\nu = w, \qquad \sum_\nu \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j},$$

d'où

$$\sum_\nu \frac{n_\nu}{w_\nu} \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = M \sum_\nu \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = M \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{m}{w} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$$

et

$$A_{ij} = \frac{m}{w^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} - \sum_\nu \frac{n_\nu}{w_\nu^2} \frac{\partial w_\nu}{\partial \alpha_i} \frac{\partial w_\nu}{\partial \alpha_j},$$

$$\frac{A_{ij}}{M} = \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} - \sum_\nu \frac{1}{w_\nu} \frac{\partial w_\nu}{\partial \alpha_i} \frac{\partial w_\nu}{\partial \alpha_j}. \qquad (5)$$

Il peut se faire que les diverses grandeurs soient fonctions d'un paramètre $\theta$ autre que les $\alpha_i$ et que l'on veuille calculer les dérivées de $\overline{\delta\alpha_i \, \delta\alpha_j}$ par rapport à $\theta$; nous désignerons ces dérivées par un accent. Partons de

$$\sum A_{jk} \overline{\delta\alpha_i \, \delta\alpha_j} = -\delta_{ik},$$

d'où

$$\sum_j A_{jk} (\overline{\delta\alpha_i \, \delta\alpha_j})' + \sum_j A'_{jk} \overline{\delta\alpha_i \, \delta\alpha_j} = 0$$

ou

$$\sum_j A_{jk} (\overline{\delta\alpha_i \, \delta\alpha_j})' = -\sum_j A'_{jk} \overline{\delta\alpha_i \, \delta\alpha_j} = +\frac{1}{\Delta} \sum_j A'_{jk} B_{ij}.$$

Résolues comme précédemment, ces équations donneront

$$(\overline{\delta\alpha_i \, \delta\alpha_j})' = \frac{1}{\Delta^2} \sum_l B_{jl} \sum_k A'_{kl} B_{ik},$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k,l} A'_{kl} B_{ik} B_{jl}.$$

En particulier

$$(\overline{\delta\alpha_i^2})' = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k,l} A'_{kl} B_{ik} B_{il}.$$

**Cas particulier.** — Supposons que les intervalles $x_\nu - x_{\nu-1}$ soient infiniment petits et écrivons, par suite,

$$w_\nu = w'(x) \, dx.$$

$$w = \int_{x_0}^{x_k} w'(x) \, dx = w(x_k) \qquad [\text{car } w(x_0) = 0],$$

et prenons comme variable $\theta$, l'extrémité $x_k$ elle-même. On a

$$\frac{A_{kl}}{M} = \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \alpha_k} \frac{\partial w}{\partial \alpha_l} - \int_{x_0}^{x_k} \frac{1}{w'(x)} \frac{\partial w'(x)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial w'(x)}{\partial \alpha_l} dx.$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{A'_{kl}}{M} &= -\frac{1}{w^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_k} \frac{\partial w}{\partial \alpha_l} w'(x_k) + \frac{1}{w} \frac{\partial w'(x_k)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial w}{\partial \alpha_l} \\ &\quad + \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \alpha_k} \frac{\partial w'(x_k)}{\partial \alpha_l} - \frac{1}{w'(x_k)} \frac{\partial w(x_k)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial w'(x_k)}{\partial \alpha_l} \\ &= -w'(x_k) \left[\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \alpha_k} - \frac{1}{w'(x_k)} \frac{\partial w'(x_k)}{\partial \alpha_k}\right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \alpha_l} - \frac{1}{w'(x_k)} \frac{\partial w'(x_k)}{\partial \alpha_l}\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$(\overline{\delta\alpha_i^2})' = -M \frac{w'(x_k)}{\Delta^2} \left[\sum_k B_{ik} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \alpha_k} - \frac{1}{w'(x_k)} \frac{\partial w'(x_k)}{\partial \alpha_k}\right)\right]^2.$$

Comme $w'(x_k)$ est certainement positif, on voit que $(\overline{\delta\alpha_i^2})'$ est toujours négatif, c'est-à-dire que $\overline{\delta\alpha_i^2}$ est une fonction décroissante de $x_k$. La plus grande précision s'obtiendra donc en prenant $x_k$ aussi grand que possible, contrairement à un résultat indiqué, dans un cas particulier, par Peierls à la suite d'un calcul numérique un peu approximatif.

Manuscrit reçu le 28 juillet 1947.

---

# THÉORIE DU CÂBLE COAXIAL. I.

Par F. POLLACZEK.

**Sommaire.** — L'auteur établit, au moyen des notions et méthodes classiques de la Physique mathématique (fonctions de Green, équations intégrales, développements en séries suivant des fonctions propres), une théorie rigoureuse du câble coaxial en régime périodique qui est fondée immédiatement sur les équations de Maxwell. Il étudie particulièrement la partie du champ qui ne subit pas d'affaiblissement exponentiel et qui échappe complètement à la théorie élémentaire des câbles fondée sur les équations de Kirchhoff.

1. **Introduction.** — Dans ce qui suit, nous esquisserons, pour le câble coaxial droit, de section circulaire, une théorie rigoureuse qui est uniquement fondée sur les équations et la théorie de Maxwell et non sur les notions secondaires de résistance, inductivité et capacité. Nous supposons que le câble, de longueur finie ou infinie, est plongé dans un milieu homogène infiniment étendu en direction radiale et qu'il consiste en deux conducteurs séparés par un isolant homogène; cependant, nos formules s'appliquent dans leur partie essentielle à un nombre arbitraire $n$ de couches homogènes coaxiales, caractérisées respectivement par les valeurs de leur rayon extérieur $r_i$, leur constante diélectrique $\varepsilon_i$, leur perméabilité $\mu_i$ et leur conductibilité $\sigma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

On sait que dans bien des domaines des Sciences, on est amené à étudier les fonctions propres et les valeurs propres de certaines équations différentielles ordinaires, ou à dérivées partielles, sous des conditions aux limites homogènes; on définit des fonctions de Green correspondant à ces problèmes, on établit les équations intégrales auxquelles satisfont les fonctions propres et grâce à des méthodes devenues classiques, l'on parvient, à résoudre les divers problèmes aux limites qui se posent dans les Applications.

Tous ces problèmes et notions ont des analogies dans la théorie du câble où, toutefois, l'on aboutit à des équations différentielles et à des conditions aux limites où figurent des fonctions données complexes; mais, jusqu'à présent, une seule de ces analogies, celle concernant les constantes de propagation du câble et les champs qui leur correspondent, paraît avoir été étudiée, bien que de manière incomplète.

Nous verrons que le spectre des constantes de propagation du câble coaxial que nous représentons dans le plan de la variable complexe $\gamma$, est constitué par un ensemble (non nécessairement infini) de points $\pm\gamma_1$, $\pm\gamma_2$, ... (spectre ponctuel) et en outre, par deux courbes qui sont symétriques par rapport à l'origine de ce plan (spectre continu). En des points situés à grande distance $r$ de l'axe du câble, les composantes des champs propres de première espèce qui correspondent au spectre ponctuel, sont de l'ordre de $\frac{e^{-\text{const.}\,r}}{\sqrt{r}}$, tandis que les composantes des champs propres de deuxième espèce s'y comportent comme $\frac{1}{r}$. Deux champs propres différents sont orthogonaux en un sens qui sera défini plus tard et cette propriété permet de résoudre les problèmes aux limites les plus simples (problèmes de Dirichlet) au moyen de développements de Fourier.

Pour des valeurs moyennes de la coordonnée axiale $z$, mesurée depuis la source d'énergie, le champ du câble est approximativement égal au champ propre de la constante $\gamma_1$ de partie réelle minimum, et proportionnel à $e^{-\gamma_1 z}$. Mais, pour $z$ tendant vers l'infini, le champ du câble est égal, à une fraction négligeable près, au champ qui correspond au premier élément du spectre continu, et proportionnel à $\frac{e^{-\frac{i\omega z}{c}}}{z^2}$, où $c$ désigne la vitesse de la lumière et $\omega$ la pulsation de la tension appliquée.

Les méthodes que nous appliquerons ont, pour une grande partie été exposées dans un Mémoire antérieur [1] qui ne sera pas supposé ici comme connu; cependant, dans le présent article où la propagation dans des systèmes à symétrie de révolution est étudiée de manière rigoureuse et plus détaillée, une partie de la théorie a été développée de manière différente et plus simple que dans le Mémoire mentionné.

Pour être bref, nous ne considérons ici que des champs qui sont sinusoïdaux, de pulsation donnée $\omega$,

[1] F. POLLACZEK, La propagation des phénomènes électromagnétiques dans des milieux à structure cylindrique *R. G. E.*, 1936, **40**, p. 103-112 et 131-147.

par rapport au temps et nous supposons, en outre, que ces champs sont de symétrie circulaire $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}=0\right)$ et que leur composante magnétique axiale $H_z$ est nulle; d'ailleurs, la théorie des champs que nous excluons ainsi est tout analogue à celle des champs de symétrie circulaire.

Nous utilisons des unités de Gauss; toutefois, vers la fin de cet article, certaines applications de nos calculs seront données en des unités électromagnétiques pratiques. Les composantes de tous les vecteurs qui figurent ici sont des fonctions complexes des coordonnées cylindriques $r$ et $z$ et de certains paramètres réels ou complexes, multipliées [sauf pour $\mathbf{E}^{(\nu)}$, $\mathbf{H}^{(\nu)}$, $E(\gamma)$, $\mathbf{E}_{(\gamma)}$, $H(\gamma)$, $\mathbf{H}_{(\gamma)}$] par le facteur $e^{i\omega t}$.

2. **Spectre des constantes de propagation et champs propres.** — Pour des états sinusoïdaux en $t$, donc pour

$$\frac{\partial}{\partial t}=i\omega, \tag{1}$$

les équations de Maxwell prennent, dans un milieu homogène, la forme

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma+i\omega\varepsilon}{c}\mathbf{E},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H},$$

où l'on posera

$$\varepsilon=\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_4,\qquad \ldots,\qquad \sigma=\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_4,$$

selon les quatre milieux de la figure 1 : conducteur

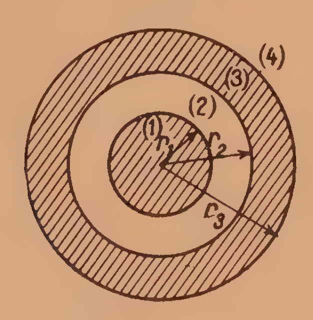



Fig. 1. — Section normale du câble coaxial.

intérieur, isolant, conducteur extérieur, diélectrique extérieur. Nous utiliserons quelquefois la forme intégrale de la 1re équation de Maxwell, à savoir

$$\int_C H_s\,\mathrm{d}s=\frac{4\pi}{c}I, \tag{2}$$

où $I$ désigne le courant qui passe à travers une surface bordée par la courbe C.

En multipliant la 1re équation par $-\frac{i\omega\mu}{c}$ et en posant

$$k^2=\frac{-4\pi i\omega\mu\sigma+\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\quad (=k_1^2\ \text{pour}\ 0\leq r<r_1,\ \ldots), \tag{3}$$

on a

$$-\frac{i\omega\mu}{c}\operatorname{rot}\mathbf{H}=k^2\mathbf{E},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}. \tag{4}$$

On sait qu'avec les hypothèses $H_z=0$ et

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=0, \tag{5}$$

les composantes $H_r$ et $E_\varphi$ s'annulent elles aussi. Il vient donc

$$H_z=H_r=E_\varphi=0, \tag{6}$$

de sorte que les équations vectorielles (4) sont équivalentes aux trois équations scalaires

$$\left.\begin{aligned}&k^2E_z=-\frac{i\omega\mu}{c}\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r},\qquad k^2E_r=\frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z},\\&-\frac{i\omega\mu}{c}H_\varphi=\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nous cherchons d'abord les solutions partielles de ces équations qui ne contiennent la variable $z$ que par un facteur $e^{-\gamma z}$; en outre, sur les surfaces de discontinuité $r=r_1$, $r_2$, $r_3$, les composantes tangentielles $E_z$ et $H_\varphi$ doivent être continues selon les postulats de la théorie de Maxwell. Enfin, en appliquant cette théorie au cas d'un câble de longueur infinie, nous ne considérerons comme physiquement réalisables que des champs dont les composantes disparaissent, pour $r$ tendant vers l'infini, au moins comme $\frac{1}{r}$.

En posant

$$\left.\begin{aligned}E_z&=e^{i\omega t-\gamma z}E_z^{(\gamma)}(r),\\E_r&=e^{i\omega t-\gamma z}E_r^{(\gamma)}(r),\\H_\varphi&=e^{i\omega t-\gamma z}H_\varphi^{(\gamma)}(r),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

nous tirons des équations (7)

$$k^2E_r^{(\gamma)}=-\frac{i\omega\mu\gamma}{c}H_\varphi^{(\gamma)},\qquad -\frac{i\omega\mu}{c}H_\varphi^{(\gamma)}=-\gamma E_r^{(\gamma)}-\frac{\mathrm{d}E_z^{(\gamma)}}{\mathrm{d}r}$$

et avec la notation

$$\varkappa^2=k^2+\gamma^2\qquad (=\varkappa_1^2\ \text{pour}\ 0\ \ r<r_1,\ \ldots), \tag{9}$$

nous obtenons

$$E_r^{(\gamma)}=-\frac{\gamma}{\varkappa^2}\frac{\mathrm{d}E_z^{(\gamma)}}{\mathrm{d}r},\qquad H_\varphi^{(\gamma)}=\frac{ck^2}{i\omega\mu\varkappa^2}\frac{\mathrm{d}E_z^{(\gamma)}}{\mathrm{d}r}. \tag{10}$$

Pour fixer le signe de $\varkappa$, convenons de désigner ici par $\varkappa$, sauf pour $k^2+\gamma^2>0$, celle des deux racines carrées du 2e membre de (9) dont la partie imaginaire est positive, donc

$$Im(\varkappa)>0. \tag{11}$$

De même, nous comprendrons sous $k$ [*voir* (3)] un nombre à partie imaginaire non négative; mais, comme alors $k$ tend vers un nombre négatif si la

conductibilité tend vers zéro, nous aurons

$$k = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \qquad \text{pour} \quad \sigma = 0. \tag{12}$$

En portant les expressions (8) et (10) dans la 1<sup>re</sup> équation (7), nous obtenons l'équation

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{rk^2}{\mu(k^2+\gamma^2)}\frac{dE_z^{(\gamma)}}{dr}\right] + \frac{rk^2}{\mu}E_z^{(\gamma)} = 0 \tag{13}$$

qui, de même que toutes les formules précédentes, est valable pour des $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ qui sont des fonctions continues quelconques de $r$.

Avec les notations

$$E_z^{(\gamma)}(r) = u_\gamma(r), \qquad \frac{rk^2}{\mu} = p(r), \tag{14}$$

(13) prend la forme

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{pu'}{k^2+\gamma^2}\right) + pu = 0 \tag{15}$$

et cette équation devient

$$u'' + \frac{1}{r}u' + \varkappa^2 u = 0 \qquad (\varkappa^2 = k^2+\gamma^2) \tag{16}$$

si $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ sont constants par morceaux; c'est la forme simple que prend l'équation des ondes à laquelle chaque composante rectangulaire de **E** et **H** satisfait dans un milieu homogène, dans notre cas particulier où

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0.$$

La solution partielle selon (8) doit satisfaire à l'équation (16), auf pour $r = r_1$, $r_2$, $r_3$, points des discontinuité de $k$ et $\mu$; mais en ces points, les composantes tangentielles $E_z^{(\gamma)} = u_\gamma$ et $H_\varphi^{(\gamma)}$ doivent rester continues. En outre, toutes les composantes doivent s'évanouir, pour $r \to \infty$, au moins comme $\frac{1}{r}$.

En désignant par $O(r^a)$ des grandeurs $\alpha(r)$ telles que

$$|\alpha| < Cr^a \qquad \text{pour} \quad r\to\infty$$
$$(\text{ou, le cas échéant, pour } r \to 0),$$

on a donc [*voir* (10) et (14)] pour un champ physiquement réalisable, outre (16), les conditions supplémentaires suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} u \quad \text{et} \quad p\dfrac{du}{dr} & \text{sont continus} \\ \text{pour} \quad r = r_1, r_2, r_3, & \text{donc pour} \quad 0 \leq r < \infty, \end{array}\right\} \tag{17}$$

$$u(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{du}{dr} = O\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{pour} \quad r\to\infty. \tag{18}$$

L'équation (16) ou

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0 \tag{19}$$

est l'équation des fonctions cylindriques d'ordre zéro.

Rappelons que (19) possède comme solutions linéairement indépendantes les fonctions de Bessel d'ordre zéro, de 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> espèces,

$$\left.\begin{array}{l} J_0(x) = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,\nu!}, \\ N_0(x) = \dfrac{2}{\pi}J_0(x)\log\dfrac{gx}{2} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,\nu!}\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\mu} \\ \qquad (g = 1{,}781\ldots) \end{array}\right\} \tag{20}$$

et que, pour les grandes valeurs de $|x|$, on utilise les fonctions de Hankel d'ordre zéro, de 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> espèces :

$$\left.\begin{array}{l} H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iN_0(x), \\ H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iN_0(x), \end{array}\right\} \tag{21}$$

Dans nos formules figureront aussi les dérivées de ces fonctions qui sont, au signe près, les fonctions cylindriques d'ordre 1, donc

$$\left.\begin{array}{l} J_1(x) = -\dfrac{dJ_0(x)}{dx}, \\ H_1^{(1)}(x) = -\dfrac{dH_0^{(1)}(x)}{dx}, \\ H_1^{(2)}(x) = -\dfrac{dH_0^{(2)}(x)}{dx}. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Pour les fonctions de Hankel, les formules asymptotiques suivantes sont valables dans le plan des $x$ découpé le long de son demi-axe négatif

$$\left.\begin{array}{l} H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{e^{ix}i^{-\nu}}{\sqrt{\dfrac{\pi i x}{2}}}\left[1 + O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right], \\ H_\nu^{(2)}(x) = \dfrac{e^{-ix}i^{\nu}}{\sqrt{\dfrac{\pi x}{2i}}}\left[1 + O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right], \\ (\nu = 0, 1, \ldots), \qquad \text{pour} \quad |x|\to\infty. \end{array}\right\} \tag{23}$$

Nous utiliserons, en outre, la formule bien connue :

$$\begin{vmatrix} H_0^{(1)}(x) & H_0^{(2)}(x) \\ H_1^{(1)}(x) & H_1^{(2)}(x) \end{vmatrix} = \frac{4i}{\pi x}. \tag{24}$$

Comme la solution $u_\gamma = E_z^{(\gamma)}$ de (16), qui n'est définie qu'à un facteur constant près, est finie à l'origine, on peut poser $u_\gamma = J_0(\varkappa_1 r)$ pour $0 \leq r \leq r_1$, tandis que, dans les autres intervalles, $u_\gamma$ peut être exprimé comme forme linéaire en $H_0^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$. On a donc, pour certaines valeurs de $\gamma$ qui seront précisées dans ce qui suit,

$$u_\gamma(r) = \left\{\begin{array}{ll} J_0(\varkappa_1 r), & 0 \leq r \leq r_1, \\ a_1 H_0^{(1)}(\varkappa_2 r) + a_2 H_0^{(2)}(\varkappa_2 r), & r_1 \leq r \leq r_2, \\ a_3 H_0^{(1)}(\varkappa_3 r) + a_4 H_0^{(2)}(\varkappa_3 r), & r_2 \leq r \leq r_3, \\ a_5 H_0^{(1)}(\varkappa_4 r) + a_6 H_0^{(2)}(\varkappa_4 r), & r_3 \leq r < \infty, \end{array}\right\} \tag{25}$$

où $a_1, \ldots, a_6$ sont des constantes. A l'infini, $u_\gamma$ doit

être nul; mais comme selon (23),

$$|H_0^{(2)}(\varkappa_4 r)| \to \infty \quad \text{pour} \quad Im(\varkappa_4) > 0, \quad r \to \infty$$

on a nécessairement, pour la constante $a_6$ qui figure dans la 4e équation (25),

$$a_6 = 0, \quad \text{sauf pour} \quad \varkappa_4 \gtrless 0. \tag{26}$$

A l'aide des formules (25) et de la notation

$$\varrho_l = \frac{k_\nu^2}{\mu_\nu \varkappa_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3), \tag{27}$$

la condition (17) de continuité des fonctions $u$ et $p \frac{du}{dr}$ pour $r = r_1, r_2, r_3$ s'exprime au moyen des six équations linéaires et homogènes suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&J_0(\varkappa_1 r_1) - a_1 H_0^{(1)}(\varkappa_2 r_1) - a_2 H_0^{(2)}(\varkappa_2 r_1) = 0,\\
&\varrho_1 J_1(\varkappa_1 r_1) - a_1 \varrho_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r_1) - a_2 \varrho_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r_1) = 0,\\
&a_1 H_0^{(1)}(\varkappa_2 r_2) + a_2 H_0^{(2)}(\varkappa_2 r_2) - a_3 H_0^{(1)}(\varkappa_3 r_2) - a_4 H_0^{(2)}(\varkappa_3 r_2) = 0,\\
&a_1 \varrho_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r_2) + a_2 \varrho_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r_2) - a_3 \varrho_3 H_1^{(1)}(\varkappa_3 r_2) - a_4 \varrho_3 H_1^{(2)}(\varkappa_3 r_2) = 0,\\
&a_3 H_0^{(1)}(\varkappa_3 r_3) + a_4 H_0^{(2)}(\varkappa_3 r_3) - a_5 H_0^{(1)}(\varkappa_4 r_3) - a_6 H_0^{(2)}(\varkappa_4 r_3) = 0,\\
&a_3 \varrho_3 H_1^{(1)}(\varkappa_3 r_3) + a_4 \varrho_3 H_1^{(2)}(\varkappa_3 r_3) - a_5 \varrho_4 H_1^{(1)}(\varkappa_4 r_3) - a_6 \varrho_4 H_1^{(2)}(\varkappa_4 r_3) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Supposons d'abord, selon (11), que $Im(k_4) > 0$; alors, la constante $a_6$ est nulle et les équations (28) ne peuvent être résolues que si le déterminant

$$D(\gamma) = \begin{vmatrix}
J_0(\varkappa_1 r_1) & H_0^{(1)}(\varkappa_2 r_1) & H_0^{(2)}(\varkappa_2 r_1) & 0 & 0 & 0\\
\varrho_1 J_1(\varkappa_1 r_1) & \varrho_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r_1) & \varrho_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r_1) & 0 & 0 & 0\\
0 & H_0^{(1)}(\varkappa_2 r_2) & H_0^{(2)}(\varkappa_2 r_2) & H_0^{(1)}(\varkappa_3 r_2) & H_0^{(2)}(\varkappa_3 r_2) & 0\\
0 & \varrho_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r_2) & \varrho_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r_2) & \varrho_3 H_1^{(1)}(\varkappa_3 r_2) & \varrho_3 H_1^{(2)})\varkappa_3 r_2) & 0\\
0 & 0 & 0 & H_0^{(1)}(\varkappa_3 r_3) & H_0^{(2)}(\varkappa_3 r_3) & H_0^{(1)}(\varkappa_4 r_3)\\
0 & 0 & 0 & \varrho_3 H_1^{(1)}(\varkappa_3 r_3) & \varrho_3 H_1^{(2)}(\varkappa_3 r_3) & \varrho_4 H_1^{(1)}(\varkappa_4 r_3)
\end{vmatrix} \tag{29}$$

s'annule. Tous les $\gamma$ susceptibles d'être des constantes de propagation de notre câble doivent donc satisfaire ou à l'équation

$$Im(\varkappa_4) = Im\left(\sqrt{k_4^2 + \gamma^2}\right) = 0 \tag{30}$$

ou à l'équation

$$D(\gamma) = 0; \tag{31}$$

nous excluons par une hypothèse les cas où, pour certains $\gamma$, ces deux équations sont satisfaites simultanément, cas dont l'étude n'apporterait rien d'essentiellement nouveau.

A l'aide des formules (20), (21), (22), on voit qu'aux points $\gamma = \pm ik_2$ et $\gamma = \pm ik_3$ où respectivement $\varkappa_2$ et $\varkappa_3$ sont nuls, la fonction analytique $D(\gamma)$ est régulière; par contre, en $\gamma = \pm ik_4$, $D(\gamma)$ a des points de ramification logarithmique. Mais, comme l'on doit avoir nécessairement

$$Im(\varkappa_4) \geq 0,$$

afin que la fonction $u_\gamma(r)$ selon (25), (26) s'annule à l'infini, nous n'aurons à considérer $D(\gamma)$ que dans le domaine où cette inégalité est satisfaite en vertu de nos conventions antérieures, donc dans le plan des $\gamma$, découpé le long des deux branches de la courbe (30) qui est représentée figure 2. Dans ce domaine, $D(\gamma)$ est une fonction paire de $\gamma$ et l'équation (31) y possède des solutions $\pm \gamma_\nu$ ($\nu = 1, \ldots$) en nombre fini ou infini qui sont les valeurs propres de l'équation (16) dans les conditions (17), (18). Car pour ces $\gamma_\nu$, les équations (28), (26) peuvent être résolues pour les $a_i$ et les fonctions propres correspondantes $u_\nu = E_z^{\gamma_\nu}(r)$ selon (25), (26) fournissent, à l'aide de (8) et (10) des solutions partielles des équations du câble.

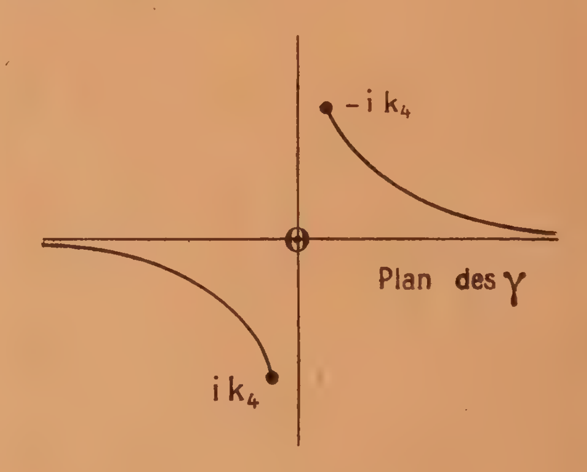



Fig. 2. — La courbe $Im(\varkappa_4) = 0$.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, ordinairement seules les racines $\pm \gamma_1$ de partie réelle minimum sont prises en considération pour la propagation de signaux téléphoniques ou télégraphiques. Pour les valeurs usuelles de $r_1$, $r_2$, $r_3$ et de $\omega$, les nombres $r_i \varkappa_2^{(1)} = r_i \sqrt{k_2^2 + \gamma_1^2}$ et $r_i \varkappa_4^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$ sont petits, si bien que, dans (28) et (29), les fonctions $H_0^{(1)}(\varkappa_2 r_1), \ldots, H_0^{(2)}(\varkappa_4 r_3)$ se réduisent à des expressions simples; en outre, en

raison de la petitesse de $\gamma_1$, $\varkappa_1^{(1)}$ et $\varkappa_3^{(1)}$ peuvent respectivement être remplacés par $k_1$ et $k_3$. Dans ces circonstances, l'équation (31) fournit, pour $\gamma_1$, la même valeur, et les équations (25) à (28) donnent pour le champ les mêmes expressions que la théorie usuelle des câbles.

Outre les solutions propres ordinaires ou de 1$^{re}$ espèce $u_\nu(r)$ dont les valeurs propres $\pm\gamma_1, \ldots$ forment le spectre ponctuel de (16) [avec (17), (18)], il existe une variété continue de solutions propres de 2$^e$ espèce $u_\gamma(r)$ correspondant aux points $\gamma$ de la courbe (30) (*fig.* 2) qui forment le spectre continu de (16) [avec (17)]. On obtiendra $u_\gamma(r)$ en résolvant d'abord les deux 1$^{res}$ équations (28) pour $a_1$ et $a_2$, ensuite les 3$^e$ et 4$^e$ équations pour $a_3$ et $a_4$, etc.; car les déterminants [*voir* (24), (27)]

$$d_\nu = \frac{4ik_\nu^2}{\pi\mu_\nu r_{\nu-1}\varkappa_\nu^2} \qquad (\nu = 2, 3, 4) \tag{32}$$

de ces paires d'équations sont différents de zéro.

En particulier, on déduit ainsi les formules

$$a_5 = -\frac{D^\star(\gamma)}{d_2 d_3 d_4}, \qquad a_6 = -\frac{D(\gamma)}{d_2 d_3 d_4} \tag{33}$$

où

$$\left.\begin{aligned} D(\gamma) &= \quad \frac{k_4^2}{\mu_4\varkappa_4} H_1^{(1)}(\varkappa_4 r_3) A_{66}(\gamma) + H_0^{(1)}(\varkappa_4 r_3) A_{56}(\gamma), \\ D^\star(\gamma) &= -\frac{k_4^2}{\mu_4\varkappa_4} H_1^{(2)}(\varkappa_4 r_3) A_{66}(\gamma) - H_0^{(2)}(\varkappa_4 r_3) A_{56}(\gamma). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$A_{56}$ et $A_{66}$ désignant ici des mineurs de la 6$^e$ colonne de la matrice (29); la 2$^e$ équation (33) met en évidence que pour les points $\gamma_\nu$ du spectre ponctuel, $u_\gamma$ se confond avec $u_\nu$.

On voit aussi que la fonction $u_\gamma(r)$ formée ainsi est une fonction entière de $\gamma$, ce que nous utiliserons par la suite; mais il faut retenir que $u_\gamma(r)$ n'a pas de signification physique, sauf pour les points des spectres ponctuel (31) et continu (30).

Il nous reste encore à étudier les fonctions propres de 2$^e$ espèce pour $r \to \infty$. Or, les formules (23) montrent que pour $\varkappa_4$ réel et $r \to \infty$, le 2$^e$ membre de la 4$^e$ équation (25) est seulement $O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$; les $u_\gamma(r)$ de 2$^e$ espèce ne remplissent donc pas la condition (18).

Mais en intégrant $e^{-\gamma z} u_\gamma(z)$ sur un arc quelconque du spectre continu, on obtient une fonction $E_z(r, z)$ dont on tire une solution $E_z$, $E_r$, $H_\varphi$ des équations (7) du câble qui satisfait aussi à toutes les conditions supplémentaires de la théorie de Maxwell. Pour montrer cela, formons, avec une fonction analytique $f(\gamma)$, les intégrales

$$\left.\begin{aligned} E_z(r, z) &= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{i\omega t - \gamma z} u_\gamma(r) f(\gamma)\, d\gamma, \\ E_r(r, z) &= -\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{i\omega t - \gamma z} \frac{\gamma}{\varkappa^2} u'_\gamma(r) f(\gamma)\, d\gamma, \\ H_\varphi(r, z) &= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{i\omega t - \gamma z} \frac{ck^2}{i\omega\mu\varkappa^2} u'_\gamma(r) f(\gamma)\, d\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

où $u'_\gamma(r) = \frac{du_\gamma(r)}{dr}$; ici, la sommation sera étendue à un arc quelconque $\widehat{\gamma_1\gamma_2}$ de la courbe (30), dont les extrémités sont supposées différentes de $\pm ik_4$. Ces fonctions satisfont évidemment aux équations (7) et aux conditions de continuité requises pour $r = r_1, r_2, r_3$, car $u_\gamma(r)$ satisfait à (16) et (17). Pour démontrer qu'en outre, les fonctions (35) sont au moins de l'ordre de $\frac{1}{r}$ pour $r \to \infty$, nous y remplaçons $u_\gamma$ par le 2$^e$ membre de la 4$^e$ équation (25), et $\gamma$ par la variable d'intégration réelle $\varkappa_4 = \varkappa$; on a alors des intégrales de la forme

$$I_{\mu,\nu} = \int_{\varkappa'}^{\varkappa''} H_\mu^{(\nu)}(\varkappa r)\, \varphi(\varkappa)\, d\varkappa \qquad (\mu = 0, 1;\ \nu = 1, 2),$$

où $\varphi(\varkappa)$ désigne une fonction complexe de $\varkappa$.

Or, à l'aide de (23) et en utilisant le fait qu'ici, $|e^{ir\varkappa}| = 1$, on a, par exemple, pour $\mu = 0$, $\nu = 1$,

$$\begin{aligned} I_{0,1} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi r i}{2}}} \int_{\varkappa'}^{\varkappa''} e^{ir\varkappa} \frac{\varphi(\varkappa)}{\sqrt{\varkappa}}\, d\varkappa + O\left(\frac{1}{r\sqrt{r}}\right) \\ &= \frac{1}{ir\sqrt{\frac{\pi r i}{2}}} \int_{\varkappa'}^{\varkappa''} \frac{\varphi(\varkappa)}{\sqrt{\varkappa}}\, d(e^{ir\varkappa}) + O\left(\frac{1}{r\sqrt{r}}\right) \\ &= \frac{1}{ir\sqrt{\frac{\pi r i}{2}}} \left\{ \left[\frac{\varphi(\varkappa)}{\sqrt{\varkappa}} e^{ir\varkappa}\right]_{\varkappa'}^{\varkappa''} \right. \\ &\qquad \left. - \int_{\varkappa'}^{\varkappa''} e^{ir\varkappa}\, d\left[\frac{\varphi(\varkappa)}{\sqrt{\varkappa}}\right] \right\} + O\left(\frac{1}{r\sqrt{r}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{r\sqrt{r}}\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Donc, les fonctions (35) forment une solution légitime des équations (7); en y remplaçant $f(\gamma)$ par $\frac{f(\gamma)}{D(\gamma)\,D^\star(\gamma)}$ [*voir* (33)] et en faisant tendre le point $\gamma_1$ vers $-ik_4$, on obtiendrait même des solutions qui sont exactement de l'ordre de $\frac{1}{r}$ pour $r \to \infty$ et les développements ultérieurs montrent qu'inversement, on peut représenter chaque champ maxwellien à l'aide des champs propres des deux espèces.

3. **Orthogonalité des fonctions propres.** — Nous démontrerons maintenant que les dérivées $\frac{du_\nu(r)}{dr}$ ou $\frac{du_\gamma(r)}{dr}$ de deux solutions propres différentes sont orthogonales. Pour cette démonstration, nous nous servirons de l'équation (15) qui est plus générale que (16) et n'utiliserons pas que $k^2$ et $\mu$ sont constants par morceaux; par conséquent, les formules qui suivent seront valables, du moins formellement, pour des $k(r)$ et des $\mu(r)$ qui sont continus par morceaux, et constants à partir d'un certain $r = R_0$.

Soient maintenant $u_1(r)$ et $u_2(r)$ deux solutions propres de (15), appartenant aux valeurs $\gamma_1$ et $\gamma_2 \neq \pm\gamma_1$ du spectre ponctuel, donc des fonctions qui satisfont, la première pour $\gamma = \gamma_1$ et la deuxième pour $\gamma = \gamma_2$, aux conditions (15), (17), (18); on a alors la formule

$$\left.\begin{aligned} I(\infty) = \int_0^\infty p(r)\frac{u'_1(r)}{k^2+\gamma_1^2}\,\frac{u'_2(r)}{k^2+\gamma_2^2}\,\mathrm{d}r = 0 \\ \left[\gamma_2 \neq \pm\gamma_1,\ p(r) = \frac{rk^2}{\mu}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

En effet, on obtient à l'aide de deux intégrations partielles qui sont légitimes en raison de (17),

$$\begin{aligned} I(R) &= \int_0^R p(r)\frac{u'_1(r)}{k^2+\gamma_1^2}\,\frac{u'_2(r)}{k^2+\gamma_2^2}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\int_0^R\left(\frac{pu'_1}{k^2+\gamma_1^2}u'_2 - \frac{pu'_2}{k^2+\gamma_2^2}u'_1\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\int_0^R \mathrm{d}\left(\frac{pu'_1}{k^2+\gamma_1^2}u_2 - \frac{pu'_2}{k^2+\gamma_2^2}u_1\right) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\int_0^R\left[\ u_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{pu'_1}{k^2+\gamma_1^2}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. - u_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{pu'_2}{k^2+\gamma_2^2}\right)\right]\mathrm{d}r \end{aligned} \quad (38)$$

et comme la fonction à intégrer du dernier terme est nulle en vertu de (15), il vient

$$\begin{aligned} I(R) &= \frac{1}{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\left[\frac{pu'_1u_2}{k^2+\gamma_1^2} - \frac{pu_1u'_2}{k^2+\gamma_2^2}\right]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{k^2R}{\mu(\gamma_2^2-\gamma_1^2)}\left[\frac{u'_1(R)u_2(R)}{k^2+\gamma_1^2} - \frac{u_1(R)u'_2(R)}{k^2+\gamma_2^2}\right]; \end{aligned} \quad (39)$$

mais grâce à (18), le dernier membre tend vers zéro pour $R \to \infty$, ce qui démontre la formule (37).

Remplaçons dans ces équations $u_2(r)$ par une fonction propre de 2e espèce $u_\gamma(r)$; dans nos hypothèses, l'équation (15) se confond pour $r > R_0$ avec (16), de sorte que l'on a [*voir* la 4e équation (25) et les formules (23)] :

$$u_\gamma(r) = a^{(1)}(\gamma)H_0^{(1)}(\varkappa_4 r) + a^{(2)}(\gamma)H_0^{(2)}(\varkappa_4 r) \quad (40)$$
$$\text{pour}\ \ Im(\varkappa_4) = 0, \qquad r > R_0,$$

$$u_\gamma(r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \qquad u'_\gamma(r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad (41)$$
$$\text{pour}\ \ r \to \infty.$$

Dans ces conditions, $I(R)$ (38) tend encore vers zéro pour $R \to \infty$, de sorte que la formule (37) reste valable si l'une des deux fonctions propres est de 2e espèce.

Mais si $u_1$ et $u_2$ sont tous deux remplacés par des fonctions propres de 2e espèce, la condition (41) ne suffit pas pour faire disparaître $I(R)$ pour $R \to \infty$. Cependant, dans ce cas, la formule (37) subsiste entre les fonctions $u_1(r) = u_\gamma(r)$ et

$$u_2(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} u_{\gamma'}(r)f(\gamma')\,\mathrm{d}\gamma', \quad (42)$$

$f(\gamma)$ désignant une fonction analytique et l'intégration étant étendue, comme dans (35) et (36), à un arc $\widehat{\gamma_1, \gamma_2}$ du spectre continu. En effectuant dans l'équation (38), avec $u_1 = u_\gamma$, $u_2 = u_{\gamma'}$, l'opération $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\ldots f(\gamma')\,\mathrm{d}\gamma'$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty p(r)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{u'_{\gamma'}(r)}{k^2+\gamma'^2}f(\gamma')\,\mathrm{d}\gamma'\,\frac{u'_\gamma(r)}{k^2+\gamma^2}\,\mathrm{d}r \\ &\quad = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p(r)\begin{vmatrix} u_{\gamma'}(r) & u_\gamma(r) \\ \dfrac{u'_{\gamma'}(r)}{\varkappa_4'^2} & \dfrac{u'_\gamma(r)}{\varkappa_4^2}\end{vmatrix}\frac{f(\gamma')}{\gamma'^2-\gamma^2}\,\mathrm{d}\gamma' \end{aligned} \quad (43)$$

et à l'aide de (40), on a, pour le 2e membre, l'expression

$$-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{rk_4^2}{\mu_4}\begin{vmatrix} a^{(1)}(\gamma')H_0^{(1)}(r\varkappa'_4) + a^{(2)}(\gamma')H_0^{(2)}(r\varkappa'_4) & a^{(1)}(\gamma)H_0^{(1)}(r\varkappa_4) + a^{(2)}(\gamma)H_0^{(2)}(r\varkappa_4) \\ \dfrac{1}{\varkappa'_4}[a^{(1)}(\gamma')H_1^{(1)}(r\varkappa'_4) + a^{(2)}(\gamma')H_1^{(2)}(r\varkappa'_4)] & \dfrac{1}{\varkappa_4}[a^{(1)}(\gamma)H_1^{(1)}(r\varkappa_4) + a^{(2)}(\gamma)H_1^{(2)}(r\varkappa_4)]\end{vmatrix}\frac{f(\gamma')}{\gamma'^2-\gamma^2}\,\mathrm{d}\gamma'. \quad (44)$$

Il faut maintenant distinguer deux cas. Admettons d'abord que ni le point $\gamma$ ni $-\gamma$ ne sont situés sur l'arc $\widehat{\gamma_1\gamma_2}$, de sorte que le facteur $\frac{f(\gamma')}{\gamma'^2-\gamma^2}$ y est borné; en appliquant alors la formule (36), on voit que (44), donc aussi le 1er membre de (43), est nul.

Supposons maintenant que le point $\gamma$ est situé sur $\widehat{\gamma_1\gamma_2}$ et traçons dans un voisinage de $\gamma$ deux arcs C′ et C″ qui soient convexes respectivement vers le haut et vers le bas (*fig.* 3). Admettons que $\varkappa_4$ est positif [ce qui est le cas, en raison de nos conventions sur le signe de la racine de (9), respectivement sur les bords supérieur et inférieur des branches droite et gauche de la courbe (30)]; on a alors, à l'aide de (23),

sur C′ : $\quad Im(\varkappa'_4) > 0,$

$$|H_0^{(1)}(\varkappa'_4 r)| \sim |H_1^{(1)}(\varkappa'_4 r)| \sim \frac{e^{-r\,Im(\varkappa'_4)}}{\sqrt{r}} \qquad \text{pour}\ \ r \to \infty,$$

sur C″ : $\quad Im(\varkappa'_4) < 0,$

$$|H_0^{(2)}(\varkappa'_4 r)| \sim |H_1^{(2)}(\varkappa'_4 r)| \sim \frac{e^{r\,Im(\varkappa'_4)}}{\sqrt{r}} \qquad \text{pour}\ \ r \to \infty.$$

En remplaçant le chemin d'intégration de (44) dans un voisinage de $\gamma$ par C′ ce qui ne change pas la valeur de cette intégrale, on obtient donc que les termes qui sont multipliés par $H_0^{(1)}(\varkappa'_4 r)$ ou par $H_1^{(1)}(\varkappa'_4 r)$, donnent pour résultat zéro; en remplaçant ensuite, pour les autres termes, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\ldots\mathrm{d}\gamma'$

par $\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\ldots\,d\gamma' - Res\,(\gamma' = \gamma)$, nous voyons que (44) devient égal à la limite de ce résidu, donc à

$$\lim_{r\to\infty}\frac{rk_4^2}{\mu_4\varkappa_4}a^{(1)}(\gamma)a^{(2)}(\gamma)\begin{vmatrix} H_0^{(2)}(\varkappa_4 r) & H_0^{(1)}(\varkappa_4 r) \\ H_1^{(2)}(\varkappa_4 r) & H_1^{(1)}(\varkappa_4 r)\end{vmatrix}\frac{f(\gamma)}{2\gamma}$$
$$= \frac{2}{\pi i}\frac{k_4^2}{\mu_4\varkappa_4^2}a^{(1)}(\gamma)a^{(2)}(\gamma)\frac{f(\gamma)}{\gamma}.$$

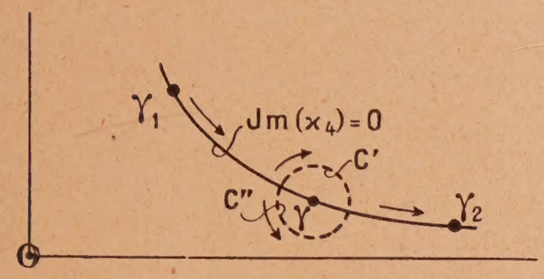



Fig. 3. — Déformation du chemin d'intégration de (44).

On obtient ainsi entre la fonction $u_\gamma(r)$ selon (15), (17), (40) et la fonction (42) la formule d'orthogonalité

$$\int_0^\infty p(r)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{u'_{\gamma'}(r)}{k^2+\gamma'^2}f(\gamma')d\gamma'\frac{u'_\gamma(r)}{k^2+\gamma^2}dr \tag{45}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \pm\gamma\notin\widehat{\gamma_1\gamma_2}, \\ \frac{2}{\pi i}\frac{k_4^2}{\mu_4\varkappa_4^2}a^{(1)}(\gamma)a^{(2)}(\gamma)\frac{f(\gamma)}{\gamma} & \text{si } \gamma\in\widehat{\gamma_1\gamma_2}.\end{cases}$$

**4. Introduction d'une fonction de Green $G^{(\gamma)}$.** — Nous étudions ensuite la fonction de Green de l'équation (16) sous les conditions (17) et (18). C'est une fonction $G^{(\gamma)}(r, r')$ de la variable réelle $r$ et des paramètres $r'$ (réel) et $\gamma$ (complexes), définie pour toutes les valeurs $\geqq 0$ de $r$ et $r'$ et pour tous les $\gamma$ qui n'appartiennent pas aux spectres ponctuel ou continu; $G^{(\gamma)}$ satisfait à (16), (17), (18) sauf au point arbitraire $r = r'$ où nous imposons à $\frac{\partial G^{(\gamma)}}{\partial r}$ la discontinuité suivante :

$$\left[\frac{p}{k^2+\gamma^2}\frac{\partial G^{(\gamma)}}{\partial r}\right]_{r=r'-0}^{r=r'+0} = 1. \tag{46}$$

Pour calculer $G^{(\gamma)}$, on procédera pareillement que lors du calcul de $u_\nu(r) = E_z^{(\gamma_\nu)}(r)$ dans l'hypothèse (11) qui avait comme suite la relation (26). Admettons par exemple que $r'$ appartienne à l'intervalle

$$r_1 \leqq r' \leqq r_2. \tag{47}$$

Dans ce cas, $G^{(\gamma)}$ satisfait à l'équation (16), sauf pour $r = r_1, r', r_2, r_3$, de sorte que l'on obtient les formules suivantes :

$$G^{(\gamma)}(r, r') = \begin{cases} b_0 J_0(\varkappa_1 r), & 0\leqq r\leqq r_1, \\ b_1 H_0^{(1)}(\varkappa_2 r) + b_2 H_0^{(2)}(\varkappa_2 r), & r_1\leqq r\leqq r', \\ b_3 H_0^{(1)}(\varkappa_2 r) + b_4 H_0^{(2)}(\varkappa_2 r), & r'\leqq r\leqq r_2, \\ b_5 H_0^{(1)}(\varkappa_3 r) + b_6 H_0^{(2)}(\varkappa_3 r), & r_2\leqq r\leqq r_3, \\ b_7 H_0^{(1)}(\varkappa_4 r), & r_3\leqq r<\infty, \end{cases} \tag{48}$$

dont les coefficients $b_0^{(\gamma)}(r')$, ... dépendent des paramètres $r'$ et $\gamma$; ensuite, les conditions (17) et (46) entraînent [en utilisant les notations (22) et (27)] huit équations linéaires non homogènes, à savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&J_0(\varkappa_1 r_1) - b_1\ H_0^{(1)}(\varkappa_2 r_1) - b_2\ H_0^{(2)}(\varkappa_2 r_1) = 0,\\
&J_1(\varkappa_1 r_1) - b_1 v_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r_1) - b_2 v_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r_1) = 0,\\
&b_1\ H_0^{(1)}(\varkappa_2 r') + b_2\ H_0^{(2)}(\varkappa_2 r') - b_3\ H_0^{(1)}(\varkappa_2 r') - b_4\ H_0^{(2)}(\varkappa_2 r') = 0,\\
&b_1 v_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r') + b_2 v_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r') - b_3 v_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r') - b_4 v_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r') = \frac{1}{r'},\\
&b_3\ H_0^{(1)}(\varkappa_2 r_2) + b_4\ H_0^{(2)}(\varkappa_2 r_2) - b_5\ H_0^{(1)}(\varkappa_3 r_2) - b_6\ H_0^{(2)}(\varkappa_3 r_2) = 0,\\
&b_3 v_2 H_1^{(1)}(\varkappa_2 r_2) + b_4 v_2 H_1^{(2)}(\varkappa_2 r_2) - b_5 v_3 H_1^{(1)}(\varkappa_3 r_2) - b_6 v_3 H_1^{(2)}(\varkappa_3 r_2) = 0,\\
&b_5\ H_0^{(1)}(\varkappa_3 r_3) + b_6\ H_0^{(2)}(\varkappa_3 r_3) - b_7\ H_0^{(1)}(\varkappa_4 r_3) = 0,\\
&b_5 v_3 H_1^{(1)}(\varkappa_3 r_3) + b_6 v_3 H_1^{(2)}(\varkappa_3 r_3) - b_7 v_4 H_1^{(1)}(\varkappa_4 r_3) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Le déterminant de ce système est égal au produit des déterminants (24) (avec $x = \varkappa_2 r'$) et $-v_2 D(\gamma)$ [(29)] et de manière générale, égal à $-\frac{4ik^2}{\pi\mu_\nu\varkappa_\nu^2 r'}D(\gamma)$, si $r'$ appartient au $\nu^{\text{ème}}$ milieu de la figure 1. Les équations (49) et celles qui leur correspondent dans le cas où $r'$ appartient à un intervalle différant de (47), possèdent donc une solution et $G^{(\gamma)}(r, r')$ existe, par conséquent, pourvu que $D(\gamma) \neq 0$, c'est-à-dire que $\gamma$ n'appartienne pas au spectre ponctuel de (16).

Entre la fonction $G^{(\gamma)}$ et les fonctions propres existent des relations qui sont importantes pour la solution des problèmes aux limites et pour le développement d'un champ arbitraire suivant les champs propres qui correspondent aux fonctions propres des deux espèces. En procédant de manière analogue que lors de la démonstration de la formule (37) et en tenant compte de (46), on obtient les formules

$$\left.\begin{aligned}
&u_\nu(r') = (\gamma^2-\gamma_\nu^2)\int_0^\infty\frac{p(r)}{k^2+\gamma^2}\frac{\partial G^{(\gamma)}(r, r')}{\partial r}\frac{u'_\nu(r)}{k^2+\gamma_\nu^2}dr \quad (\gamma^2\neq\gamma_\nu^2),\\
&u_{\gamma'}(r') = (\gamma^2-\gamma'^2)\int_0^\infty\frac{p(r)}{k^2+\gamma^2}\frac{\partial G^{(\gamma)}(r, r')}{\partial r}\frac{u'_{\gamma'}(r)}{k^2+\gamma'^2}dr \quad (\gamma^2\neq\gamma'^2),
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

où $u_\nu(r) = E_z^{(\gamma_\nu)}(r)$ et $u_{\gamma'}(r) = E_z^{(\gamma')}(r)$ sont respectivement des solutions propres de 1re et de 2e espèces de (15) ou (16).

En appliquant le même procédé aux fonctions $G^{(\gamma)}(r, r')$ et $G^{(\gamma)}(r, r'')$, on obtient la formule bien connue

$$G^{(\gamma)}(r, r') = G^{(\gamma)}(r', r). \tag{51}$$

On peut se rendre compte facilement que, pour $\gamma = \gamma_\nu$, tous les mineurs $A_{i\varkappa}$ de la matrice (29) ne peuvent pas être nuls à la fois, ce qui entraîne l'unicité des fonctions propres $u_\nu(r)$ et, de là, on conclut que les zéros $\gamma_\nu$ de $D(\gamma)$ sont simples. Dans ces conditions, $u_\nu(r)$ est égal, à un facteur près qui dépend de $r'$, à la fonction

$$\lim_{\gamma \to \gamma_\nu} (\gamma - \gamma_\nu) G^{(\gamma)}(r, r') = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\nu} G^{(\gamma)}(r, r')\, d\gamma, \tag{52}$$

$K_\nu$ désignant ici un petit cercle autour du point $\gamma_\nu$; car la dérivée, par rapport à $r$, de cette fonction est continue pour $r = r'$, de sorte qu'elle satisfait aux équations (16), (17), (18) pour $\gamma = \gamma_\nu$. En raison de (51), on a donc

$$\lim_{\gamma \to \gamma_\nu} (\gamma - \gamma_\nu) G^{(\gamma)}(r, r') = c_\nu u_\nu(r) u_\nu(r'), \tag{53}$$

où $c_\nu$ est une constante que nous pouvons calculer en introduisant ici pour $r$ et $r'$ des valeurs particulières quelconques.

En choisissant par exemple $r = 0$, $r' = r_1$, ce qui est compatible avec l'hypothèse (47) dans laquelle nous avons établi les formules (48), (49) de $G^{(\gamma)}$, on tire de (25) et de la 1re équation (28),

$$u_\nu(0) = 1, \qquad u_\nu(r_1) = J_0[\varkappa_1^{(\nu)} r_1] \qquad [\varkappa_1^{(\nu)} = \sqrt{k_1^2 + \gamma_\nu^2}].$$

Ensuite, la 1re équation (48) et les équations (49) donnent

$$G^{(\gamma)}(0, r_1) = b_0^{(\gamma)}(r_1) = \frac{A_{21}(\gamma)}{r_1 D(\gamma)},$$

où $A_{21}(\gamma)$ désigne le mineur de l'élément $a_{21}$ de la matrice (29), et il vient

$$\lim_{\gamma \to \gamma_\nu} (\gamma - \gamma_\nu) G^{(\gamma)}(0, r_1) = \lim_{\gamma \to \gamma_\nu} (\gamma - \gamma_\nu) \frac{A_{21}(\gamma)}{r_1 D(\gamma)} = \frac{A_{21}(\gamma_\nu)}{r_1 D'(\gamma_\nu)}.$$

En introduisant ces expressions dans (53), on obtient

$$c_\nu = \frac{1}{r_1 J_0[\varkappa_1^{(\nu)} r_1]} \frac{A_{21}(\gamma_\nu)}{D'(\gamma_\nu)}, \tag{54}$$

de sorte que (53) prend la forme

$$\lim_{\gamma \to \gamma_\nu} (\gamma - \gamma_\nu) G^{(\gamma)}(r, r') = \frac{u_\nu(r) u_\nu(r')}{r_1 J_0[\varkappa_1^{(\nu)} r_1]} \frac{A_{21}(\gamma_\nu)}{D'(\gamma_\nu)}. \tag{55}$$

Cette équation montre que la fonction analytique de $\gamma$

$$G^{(\gamma)}(r, r') - \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)} \frac{A_{21}(\gamma)}{D(\gamma)} \tag{56}$$

est régulière aux points $\gamma = \gamma_\nu$ du spectre ponctuel, quelles que soient les valeurs de $r$ et $r'$; d'ailleurs, on peut démontrer aisément que le numérateur de cette expression est algébriquement divisible par $D(\gamma)$.

Désignons par $f^*(\gamma)$ la fonction en laquelle une fonction analytique $f(\gamma)$ [qui soit holomorphe dans le plan $\gamma$ découpé selon la figure 2] se transforme quand $\gamma$ contourne le point $-ik_4$ une fois dans le sens positif; on a, en particulier,

$$\left.\begin{aligned} [H_0^{(1)}(\varkappa_4 r)]^* &= -H_0^{(2)}(\varkappa_4 r), \\ \left[\frac{H_1^{(1)}(\varkappa_4 r)}{\varkappa_4}\right]^* &= -\frac{H_1^{(2)}(\varkappa_4 r)}{\varkappa_4} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

et ces formules suffisent pour toutes nos applications. Considérons maintenant la différence

$$\Delta G^{(\gamma)}(r, r') = G^{(\gamma)}(r, r') - G^{(\gamma)*}(r, r') \qquad [Im(\varkappa_4) = 0] \tag{58}$$

entre les valeurs que $G^{(\gamma)}$ prend sur les bords supérieur et inférieur de la branche droite de la coupure (30). Considéré comme fonction de $r$, $\Delta G^{(\gamma)}$ satisfait évidemment à (16) et (17), même pour $r = r'$, et est, d'après la 4e équation (48), de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{r}}$ pour $r \to \infty$; c'est donc une fonction propre de 2e espèce. Comme c'est, en outre [*voir* (51)], une fonction symétrique en $r$ et $r'$, on a

$$\Delta G^{(\gamma)}(r, r') = c(\gamma) u_\gamma(r) u_\gamma(r') \qquad [Im(\varkappa_4) = 0] \tag{59}$$

et $c(\gamma)$ peut être calculé, comme auparavant $c_\nu$, en introduisant ici pour $r$ et $r'$ des valeurs particulières.

Avec les valeurs précédentes $r = 0$, $r' = r_1$, le calcul fait plus haut fournit la relation

$$\begin{aligned} c(\gamma) &= \frac{1}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)} \left[\frac{A_{21}(\gamma)}{D(\gamma)} - \frac{A_{21}^*(\gamma)}{D^*(\gamma)}\right] \\ &= \frac{1}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)} \Delta \frac{A_{21}(\gamma)}{D(\gamma)} \end{aligned} \tag{60}$$

et de là,

$$\Delta G^{(\gamma)} = \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)} \Delta \frac{A_{21}(\gamma)}{D(\gamma)}. \tag{61}$$

Comme la fonction $\frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)}$ n'est pas ramifiée en $\gamma = \pm ik_4$, la dernière équation peut être écrite sous la forme

$$\Delta\left[G^{(\gamma)}(r, r') - \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)} \frac{A_{21}(\gamma)}{D(\gamma)}\right] = 0; \tag{62}$$

donc, la fonction (56) est régulière aussi bien en $\gamma = \pm ik_4$ qu'aux points du spectre ponctuel, et cette propriété qui subsiste évidemment pour les dérivées (par rapport à $r$ ou à $r'$) de (56), sera utilisée dans la suite lors du développement de la composante $E_z(r, z)$ d'un champ **E** quelconque d'après les fonctions propres $E_z^{(\gamma_\nu)}(r)$ et $E_z^{(\gamma)}(r)$.

Les grandeurs $c_\nu$ (54) et $c(\gamma)$ (60) peuvent être représentées par des intégrales définies où figurent

les fonctions propres. Pour obtenir la première de ces formules, faisons tendre $\gamma$ vers $\gamma_\nu$ dans la 1re équation (50) en utilisant la formule (53); il vient

$$u_\nu(r') = 2\,c_\nu \gamma_\nu \int_0^\infty \frac{r k^2}{\mu}\left[\frac{u'_\nu(r)}{k^2+\gamma_\nu^2}\right]^2 \mathrm{d}r\; u_\nu(r')$$

ou

$$\frac{1}{c_\nu} = 2\int_0^\infty \frac{\gamma_\nu k^2}{\mu}\left[\frac{u'_\nu(r)}{\varkappa^{(\nu)2}}\right]^2 r\,\mathrm{d}r. \qquad (63)$$

Appliquons ensuite la formule (45), pour $\gamma \in \widehat{\gamma_1\gamma_2}$, à la fonction propre de 2e espèce $u_\gamma(r)$ selon (25) et posons-y $f(\gamma) = \gamma$; il faut alors introduire, dans (45), pour $a^{(1)} = a_5$ et $a^{(2)} = a_6$ les expressions (33) et l'on obtient, à l'aide de la notation (32),

$$2\int_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\gamma'}{\varkappa'^2} u'_{\gamma'}(r)\,\mathrm{d}\gamma' \frac{k^2 u'_\gamma(r)}{\mu\varkappa^2}\, r\,\mathrm{d}r$$
$$= -\frac{r_3 D(\gamma) D^*(\gamma)}{d_2^2 d_3^2 d_4}, \quad \gamma \in \widehat{\gamma_1\gamma_2} \qquad (\varkappa'^2 = k^2+\gamma'^2). \quad (64)$$

On vérifie maintenant à l'aide des équations (24), (32), (34) l'identité

$$\frac{1}{D(\gamma)D^*(\gamma)} = -\frac{1}{d_4 A_{66}} \Delta \frac{H_0^{(1)}(\varkappa_4 r_3)}{D(\gamma)},$$

grâce à laquelle on a

$$\left[2\int_0^\infty \ldots \mathrm{d}r\right]^{-1} = \frac{d_2^2 d_3^2}{r_3 A_{66}} \Delta \frac{H_0^{(1)}(\varkappa_4 r_3)}{D(\gamma)}; \qquad (65)$$

en outre, on peut établir, au moyen d'un calcul simple qui porte sur les mineurs de la matrice (29) et que nous laisserons au lecteur, l'identité

$$\frac{d_2^2 d_3^2}{r_3 A_{66}} \Delta \frac{H_0^{(1)}(\varkappa_3 r_3)}{D(\gamma)} = -\frac{1}{r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)} \Delta \frac{A_{21}(\gamma)}{D(\gamma)}. \quad (66)$$

Des deux dernières équations et de (60), on tire, analoguement à (63), la formule

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c(\gamma)} &= -2\int_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\gamma'}{\varkappa'^2} u'_{\gamma'}(r)\,\mathrm{d}\gamma' \frac{k^2 u'_\gamma(r)}{\mu\varkappa^2}\, r\,\mathrm{d}r, \\ &\gamma \in \widehat{\gamma_1\gamma_2} \qquad (\varkappa'^2 = k^2+\gamma^2). \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

5. **Interprétation physique de $G^{(\gamma)}$ et des formules d'orthogonalité.** — Les formules du dernier chapitre admettent une interprétation physique simple. Identifions d'abord la fonction $\frac{2i\omega}{c^2} G^{(\gamma)}$ avec la fonction $E_z^{(\gamma)}$ qui figure dans (8) et (10) et formons, selon ces équations, les expressions

$$\left.\begin{aligned} e^{i\omega t-\gamma z}\overline{E}_z^{(\gamma)}(r, r') &= e^{i\omega t-\gamma z}\frac{2i\omega}{c^2} G^{(\gamma)}(r, r'), \\ e^{i\omega t-\gamma z}\overline{E}_r^{(\gamma)}(r, r') &= e^{i\omega t-\gamma z}\frac{-2i\omega\gamma}{c^2\varkappa^2}\frac{\partial G^{(\gamma)}(r, r')}{\partial r}, \\ e^{i\omega t-\gamma z}\overline{H}_\varphi^{(\gamma)}(r, r') &= e^{i\omega t-\gamma z}\frac{2k^2}{c\mu\varkappa^2}\frac{\partial G^{(\gamma)}(r, r')}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Ces fonctions sont les composantes du champ électromagnétique d'un câble selon la figure 1, car $G^{(\gamma)}$ satisfait aux conditions (16), (17), sauf pour $r = r'$, et à (18).

Sur la surface latérale de cylindre

$$r = r', \qquad (69)$$

la composante $H_\varphi$ de ce champ subit, en vertu de (46), la discontinuité

$$\Delta H_\varphi = \left[e^{i\omega t-\gamma z}\overline{H}_\varphi^{(\gamma)}(r, r')\right]_{r=r'-0}^{r=r'+0} = \frac{2}{cr'} e^{i\omega t-\gamma z} \quad (70)$$

et à celle-ci correspond, d'après l'équation (2), un courant de surface

$$I = \frac{c}{4\pi} 2\pi r' \Delta H_\varphi = e^{i\omega t-\gamma z}. \qquad (71)$$

Nous pouvons donc dire que le champ électromagnétique « de Green » (68) est engendré par une nappe de courant sinusoïdal $I = e^{i\omega t-\gamma z}$ qui s'écoule en direction axiale le long de la surface (69).

Multiplions maintenant le 2e membre de la formule (37) [où $u_\nu(r)$ (14) est l'abréviation pour $E_z^{(\nu)}(r) = E_z^{(\gamma_\nu)}(r)$] par

$$\frac{c}{4\pi} e^{i\omega t-\gamma_1 z}(-\gamma_1)\, e^{i\omega t-\gamma_2 z} \frac{c}{i\omega} 2\pi;$$

compte tenu des équations (8) et (10), (37) prend alors la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{c}{4\pi}\int_0^\infty e^{i\omega t-\gamma_1 z}E_r^{(1)}(r)\, e^{i\omega t-\gamma_2 z}H_\varphi^{(2)}(r)\, 2\pi r\,\mathrm{d}r = 0 \\ (\gamma_2 \neq \pm\gamma_1). \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Cette équation exprime le fait que le « flux complexe » du vecteur de Poynting mutuel

$$\frac{c}{4\pi}\left[e^{i\omega t-\gamma_1 z}\mathbf{E}^{(1)}(r),\ e^{i\omega t-\gamma_2 z}\mathbf{H}^{(2)}(r)\right] \qquad (73)$$

de deux champs propres (ordinaires) différents à travers un plan quelconque perpendiculaire à l'axe, est nul; notons que ce flux doit être formé au moyen des composantes complexes des deux vecteurs qui figurent dans (73).

Comme des intégrales pareilles à (72) se trouvent dans une partie des formules ultérieures, nous introduisons, pour le flux du vecteur,

$$\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}(r, z), \mathbf{H}(r, r')]$$

à travers le plan $z = \text{const.}$ la notation

$$\frac{c}{4\pi}\int_0^\infty E_r(r, z) H_\varphi(r, r')\, 2\pi r\,\mathrm{d}r = \mathbf{E}(z).\mathbf{H}(r') \quad (74)$$

où la variable d'intégration est supprimée; de même, nous posons

$$\frac{c}{4\pi}\int_0^\infty E_r^{(\mu)}(r) H_\varphi^{(\nu)}(r)\, 2\pi r\,\mathrm{d}r = \mathbf{E}^{(\mu)}.\mathbf{H}^{(\nu)}. \quad (75)$$

Supprimons dans (72) les facteurs $e^{i\omega t - \gamma_\nu z}$; avec la notation (75), cette équation prend alors la forme

$$\mathbf{E}^{(1)}.\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)}.\mathbf{H}^{(1)} = 0 \qquad (\gamma_2 \neq \pm \gamma_1) \tag{76}$$

et, de la même façon, on a

$$\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\gamma)} = \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\nu)} = 0 \tag{77}$$

pour le flux complexe mutuel de deux champs propres de différentes espèces.

Grâce à (74), l'équation (45), valable pour des solutions propres de (16) qui sont pour $r > R_0$ de la forme (40), devient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \mathbf{E}^{(\gamma')} f(\gamma')\, d\gamma' . \mathbf{H}^{(\gamma)} \tag{78}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \pm\gamma \notin \widehat{\gamma_1\gamma_2}, \\ -\dfrac{c^2 k_4^2}{2\pi\omega\mu_4 \varkappa_4^2}\, a^{(1)}(\gamma)\, a^{(2)}(\gamma) f(\gamma) & \text{si} \quad \gamma \in \widehat{\gamma_1\gamma_2}; \end{cases}$$

c'est la loi d'orthogonalité entre un champ de 2e espèce et l'intégrale, par rapport à $d\gamma$, d'un tel champ.

Avec les notations (75) et

$$\left.\begin{aligned} \int \mathbf{E}^{(\gamma)}(r) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \mathbf{E}^{(\gamma')}(r)\, d\gamma' \\ &\left[\gamma \in \widehat{\gamma_1\gamma_2},\ Im(\varkappa_4) = 0\right], \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

les équations (54), (63) et (60), (67) donnent respectivement

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{c_\nu} = \frac{r_1 J_0[\varkappa_1^{(\nu)} r_1]\, D'(\gamma_\nu)}{A_{21}(\gamma_\nu)} = -\frac{4i\omega}{c^2}\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)} \\ &\text{et} \\ &\frac{1}{c(\gamma)} = r_1 J_0(\varkappa_1 r_1)\left[\Delta \frac{A_{21}(\gamma)}{D(\gamma)}\right]^{-1} = \frac{4i\omega}{c^2}\int \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

et en remplaçant $\frac{2i\omega}{c^2} G^{(\gamma)}$ d'après (68) par $\overline{E}_z^{(\gamma)}$, les équations (53) et (59) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\nu} \overline{E}_z^{(\gamma)}(r, r')\, d\gamma &= -\frac{E_z^{(\nu)}(r)\, E_z^{(\nu)}(r')}{2\mathbf{E}^{(\nu)}.\mathbf{H}^{(\nu)}}, \\ \Delta \overline{E}_z^{(\gamma)}(r, r') &= \frac{E_z^{(\gamma)}(r)\, E_z^{(\gamma)}(r')}{2\int \mathbf{E}^{(\gamma)}.\mathbf{H}^{(\gamma)}}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

En multipliant la 1re équation (50) respectivement par $\frac{\gamma}{\gamma^2 - \gamma^2}$ et par $\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu^2 - \gamma^2}$), on obtient

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r').\mathbf{H}^{(\nu)} &= \frac{\gamma}{\gamma_\nu^2 - \gamma^2} E_z^{(\nu)}(r'), \\ \mathbf{E}^{(\nu)}.\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r') &= \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu^2 - \gamma^2} E_z^{(\nu)}(r') \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

et, de manière analogue, on tire de la 2e équation (50)

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathbf{E}}^{(\gamma)}(r').\mathbf{H}^{(\gamma')} &= \frac{\gamma}{\gamma'^2 - \gamma^2} E_z^{(\gamma')}(r'), \\ \mathbf{E}^{(\gamma')}.\overline{\mathbf{H}}^{(\gamma)}(r') &= \frac{\gamma'}{\gamma'^2 - \gamma^2} E_z^{(\gamma')}(r'). \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

(*A suivre.*)

---

*Le Gérant :* MAURICE BLONDIN. 127019 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1947.